Program w języku aplikatywnym składa się na ogół z opisu zbiorów będących przedmiotem zainteresowania oraz z wielu definicji funkcji operujących na tych zbiorach. Definicje te są ze sobą wzajemnie powiązane w tym sensie, że raz zdefiniowane funkcje mogą być używane do definiowania następnych. Po wprowadzeniu programu do komputera można zażądać obliczenia wartości wybranej funkcji dla zadanych argumentów.

Oprócz składania funkcji drugim mechanizmem budowania programów funkcyjnych jest *rekurencja*. Jej istota polega na tym, że definiując wartość funkcji dla ustalonego argumentu możemy odwołać się do wartości tej samej funkcji dla innego argumentu, przy założeniu, że tę drugą wartość potrafimy (być może znowu z wykorzystaniem rekurencji) obliczyć. Oczywiście, dla pewnych argumentów wartość funkcji musi być podana jawnie. Mechanizm rekurencji można porównać do znanej ze szkoły zasady indukcji, która pozwala dowodzić twierdzenie dla ustalonej liczby naturalnej, przy założeniu, że dla liczb mniejszych jest ono prawdziwe.

Ilustracją myślenia w kategoriach funkcji rekurencyjnych niech będzie program w języku MIRANDA, który dla danej liczby M daje w wyniku zbiór wszystkich trójek pitagorejskich a, b, c, gdzie $c \leq M$.

$$TrójkiPitagorejskie(M) = [\ ],\ M = 1$$

Dla $M = 1$ zbiór rozwiązań jest pusty.

$$TrójkiPitagorejskie(M) = T(M, M-1) ++ TrójkiPitagorejskie(M-1)$$

W przeciwnym razie, dla $M > 1$ zbiór trójek dla c od 1 do M uzyskujemy dołączając (operacja ++) do zbioru trójek dla ustalonego $c = M$ zbiór trójek otrzymany (rekurencyjnie) dla wszystkich $c \leq M - 1$.

$$T(c, b) = [\ ],\ b = 1$$

Niezależnie od wartości c, dla $b = 1$ zbiór rozwiązań jest pusty.

$$\begin{aligned} T(c, b) = {} & \\ & [(a, b, c)] ++ T(c, b-1),\ a = trunc(a) \\ & \textbf{where } a = sqrt(c \star c - b \star b) \\ T(c, b) = {} & T(c, b-1) \end{aligned}$$

W przeciwnym razie: gdy $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ jest liczbą całkowitą, dołączamy do zbioru rozwiązań trójkę a, b, c; natomiast gdy żaden z dwóch powyższych warunków nie jest spełniony, zbiór rozwiązań dla b pokrywa się ze zbiorem dla $b - 1$.

Interpretacja powyższych funkcji jest następująca. Funkcja *TrójkiPitagorejskie* dla danego argumentu M daje w wyniku wszystkie trójki, w których c nie przekracza M.

XXX Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna (Brunszwik 1989)

Zadanie 3

Niech n oraz k będą ustalonymi liczbami naturalnymi. Zbiór S złożony z n punktów płaszczyzny ma następujące własności:

a) żadne trzy punkty zbioru S nie leżą na jednej prostej;

b) dla każdego punktu P, należącego do S, istnieje w S co najmniej k różnych punktów równo odległych od P.

Udowodnić, że $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez T zbiór trójek uporządkowanych (M, N, P) punktów zbioru S o tej własności, że $|PM| = |PN|$. Niech t będzie liczbą wszystkich takich trójek. Z warunków zadania wynikają następujące fakty:

a') Dla dowolnych punktów $M, N \in S$ istnieją w zbiorze T co najwyżej dwie różne trójki, których pierwszymi dwoma elementami są te właśnie punkty M i N (bowiem każdy punkt P uzupełniający parę (M, N) do trójki (M, N, P) musi leżeć na symetralnej odcinka MN, która – w myśl warunku a) – przechodzi przez nie więcej niż dwa punkty zbioru S). Ponieważ punkt M można ustalić na n sposobów, a punkt N – przy ustalonym M – na $n - 1$ sposobów, zatem

$$(1) \qquad t \leq 2n(n-1).$$

b') Dla dowolnego punktu $P \in S$ istnieje w zbiorze T co najmniej $k(k-1)$ różnych trójek, których ostatnim elementem jest P; mamy bowiem – zgodnie z warunkiem b) – co najmniej k punktów zbioru S równo odległych od P; możemy wybrać dowolny z nich jako punkt M, a następnie dowolny z pozostałych $k - 1$ punktów jako punkt N. Ponieważ punkt P można ustalić na n sposobów, otrzymujemy nierówność

$$(2) \qquad t \geq nk(k-1).$$

Z nierówności (1) i (2) wynika, że $k(k-1) \leq 2(n-1)$, a stąd

$$2n \geq k^2 - k + 2 > \left(k - \frac{1}{2}\right)^2,$$

co dowodzi tezy zadania.

Rozwiązanie zadania F 301. Zauważmy, że moment bezwładności jest wielkością addytywną, tzn. moment bezwładności danego ciała jest sumą momentów jego części składowych. A zatem moment bezwładności pełnego walca możemy przedstawić jako sumę momentu I naszej bryły i momentu I_w walca (wykonanego z tego samego materiału) wsuniętego w wydrążenie:

$$\frac{1}{2}Ma^2 = I + I_w$$

(M oznacza masę pełnego walca).

I_w obliczamy korzystając z tw. Steinera:

$$I_w = \frac{1}{2}m_w b^2 + m_w d^2,$$

gdzie przez m_w oznaczyliśmy masę walca wsuniętego do wydrążenia.

Ponieważ

$$M = m + m_w,\ \frac{m_w}{M} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{więc} \quad M = \frac{ma^2}{a^2 - b^2},\ m_w = \frac{mb^2}{a^2 - b^2}.$$

Ostatecznie znajdujemy

$$I = m\left(\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{b^2 d^2}{a^2 - b^2}\right).$$