Wielomiany czynnikowe i symbol Newtona

Tadeusz GERSTENKORN,
Tadeusz ŚRÓDKA

W niniejszym artykule proponuje się inne niż tradycyjne wprowadzenie symbolu Newtona, a mianowicie oparte na pojęciu wielomianu czynnikowego. Pozwala to na pewne uogólnienie bez zwiększania trudności oraz łatwiejszy i bardziej zwięzły sposób notacji, zwłaszcza przy rozwiązywaniu zadań kombinatorycznych w rachunku prawdopodobieństwa. Stanowi również okazję do poszerzenia wiadomości z dziedziny wielomianów.

Definicja 1. **Wielomian czynnikowy** (zwany także niekiedy **faktorialnym** lub **silniowym, a także uogólnioną potęgą**) stopnia r względem x z krokiem h określamy rekurencyjnie

(1) $$x^{[0,h]} = 1\,, \quad x^{[r,h]} = x^{[r-1,h]}(x-(r-1)h)\,, \quad r = 1,2,3,\ldots,$$

przy czym h jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Z określenia wynika, że

$$x^{[r,h]} = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(r-1)h)\,, \quad r = 1,2,3,\ldots$$

W przypadku $h = 1$ będziemy pisać

$$x^{[r,1]} = x^{[r]}$$

i mówić o wielomianie czynnikowym zstępującym, tj.

$$x^{[r]} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)\,, \quad r = 1,2,3,\ldots,$$

przy czym uwzględniając (1) mamy

(2) $$x^{[0]} = 1\,.$$

Jeżeli $h = 0$, to, oczywiście,

$$x^{[r,0]} = x^r\,,$$

tj. potęga x jest szczególnym przypadkiem wprowadzonego wielomianu.

Jeśli $h = -1$, stosujemy zapis

$$x^{[r,-1]} = x^{[-r]}$$

i mówimy o wielomianie czynnikowym wstępującym. W tym przypadku mamy więc

$$x^{[-r]} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+r-1)\,, \quad r = 1,2,3,\ldots$$

Przykład 1. Obliczyć: a) $x^{[3,2]}$, b) $x^{[-3]}$.

Rozwiązanie.
a) $x^{[3,2]} = x(x-2)(x-4)$,
b) $x^{[-3]} = x(x+1)(x+2)$.

Przyjmujemy następującą definicję symbolu $\binom{p}{k}$ (czytaj: p nad k) zwanego symbolem Newtona.

Definicja 2. Dla dowolnej liczby rzeczywistej p

(3) $$\binom{p}{k} = \frac{p^{[k]}}{k!} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{k!}\,,$$

jeśli k jest liczbą naturalną; poza tym, wyjąwszy $k = 0$,

$$\binom{p}{k} = 0\,.$$

Rozwiązanie zadania F 306.
Niech R oznacza długość wielkiej półosi orbity ziemskiej, $R(1-e)$ jest odległością Ziemia – Słońce w peryhelium, a $R(1+e)$ w aphelium. Niech $T_a + \Delta T$, T_a oznaczają odpowiednio średnie temperatury Ziemi w peryhelium i aphelium. Dla ciała doskonale szarego moc wypromieniowywana jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury. Moc dostarczona przez Słońce jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości Ziemia – Słońce. Korzystając z bilansu energii dostarczonej i wypromieniowanej mamy:

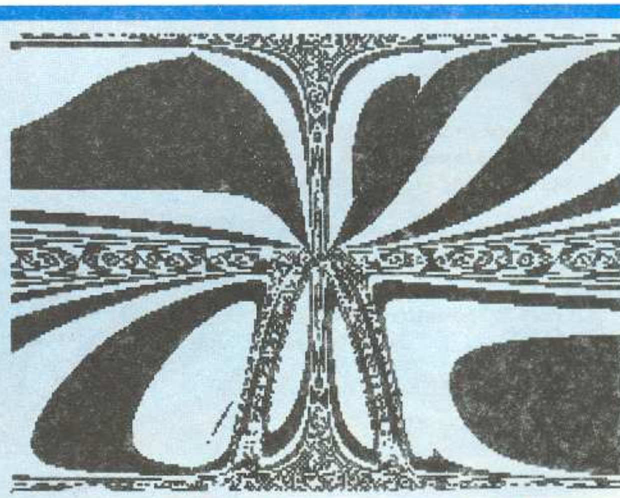
$$T^4 \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{(T_a+\Delta T)^4}{T_a^4} = \frac{R^2(1+e)^2}{R^2(1-e)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T_a} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - 1\,.$$

Szacując $T_a \approx 273$ K dostajemy $\Delta T \approx$ $\approx 5°$ C.

```
program motyl;
  Użyj
begin
  Zacznij
  sx := 18; sy := 27; x := -127/sx;
  while x < 126/sx do
    begin x := x+1/sx; y := -95/sy;
    while y < 95/sy do
      begin y := y+1/sy;
      if sin(y/(x*sin(y))-sqrt(abs(y*y-x*x)))
        -x/(y*cos(1/(x+y/x)))<0
       then RysujPunkt(round(x*sx)+128,
                     round(y*sy)+95, Jak);
      end;
    end;
  Poczekaj
end.
```



Z definicji silni dla $k = 0$ $(0! = 1)$ oraz z (2) mamy

$$\binom{p}{k} = 1\,, \quad \text{jeśli} \quad k = 0\,.$$

Z definicji 2 wynika, że gdy p i k są liczbami naturalnymi $(p = n)$, to

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{dla} \quad 0 \le k \le n \tag{4}$$

oraz

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{dla} \quad k > n\,.$$

Z (4) po prostych przekształceniach otrzymuje się często stosowane wzory:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\,, \qquad 0 \le k \le n\,,$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}\,, \qquad 1 \le k \le n\,.$$

Przykład 2. Obliczyć wartość wyrażeń: a) $\binom{-7}{3}$, b) $\binom{3/2}{4}$.

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru (3) mamy

a) $$\binom{-7}{3} = \frac{(-7)(-8)(-9)}{3!} = -84\,,$$

b) $$\binom{3/2}{4} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{4!} = \frac{3}{128}\,.$$

Przykład 3. Wykazać, że dla $p > 0$ i k naturalnego zachodzi równość

$$\binom{-p}{k} = (-1)^k\binom{p+k-1}{k}\,.$$

Rozwiązanie. Ze wzoru (3) mamy

$$\binom{-p}{k} = \frac{(-p)^{[k]}}{k!} = \frac{(-p)(-p-1)\dots(-p-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{(-1)^k(p+k-1)(p+k-2)\dots p}{k!} =$$

$$= \frac{(-1)^k(p+k-1)^{[k]}}{k!} = (-1)^k\binom{p+k-1}{k}\,.$$

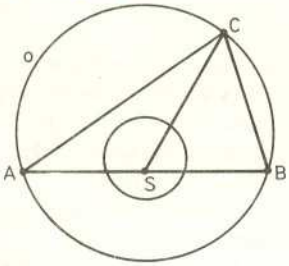
Przy okazji stwierdzamy, że zachodzi równość

$$(-p)^{[k]} = (-1)^k p^{[-k]}\,,$$

wyrażająca zależność między wielomianami czynnikowymi zstępującymi i wstępującymi.

Na powiązanie wielomianów czynnikowych zstępujących z rachunkiem różnicowym, na ciekawe własności wynikające z ustalenia relacji między nimi a wielomianami zwykłymi (liczby Stirlinga pierwszego rodzaju) wskazał R. Rabczuk (*Matematyka*, 5–6 (103), 1968, str. 196–199).

Rozwiązanie zadania M 599. Jest to okrąg będący obrazem okręgu o w jednokładności o skali $\frac{1}{3}$ względem środka S odcinka AB (bez przecięć tego okręgu z AB).



Wystarczy zauważyć, że dla każdego położenia punktu C środek ciężkości trójkąta ABC leży w $\frac{1}{3}$ odległości SC od punktu S (środek ciężkości to punkt przecięcia środkowych, a te dzielą się w stosunku $2:1$).

```
program motyl;
  Użyj
begin
  Zacznij
  sx := 15; sy := 10; x := -127/sx;
  while x < 126/sx do
   begin x := x+1/sx; y := -95/sy;
   while y < 95/sy do
    begin y := y+1/sy;
    if sin((x*x*x-y*y*y)/(x*y))<0
     then RysujPunkt(round(x*sx)+128,
                     round(y*sy)+95,
                     Jak);
    end;
   end;
  Poczekaj
end.
```