przy odpowiednio równych potęgach zmiennej muszą być równe:

$$A - B = 1,$$
$$Am - Bn = 0,$$
$$Am^2 - Bn^2 = \frac{1}{3}p,$$
$$Am^3 - Bn^3 = q.$$

Mamy rozwiązać układ 4 równań z 4 niewiadomemi. Z pierwszego równania wyznaczamy $A = B + 1$ i podstawiamy do pozostałych równań:

$$B(m-n) + m = 0,$$
$$B(m^2 - n^2) + m^2 = \frac{1}{3}p,$$
$$B(m^3 - n^3) + m^3 = q.$$

Wyznaczamy teraz zespół $B(m-n) = -m$ i podstawiamy do dwóch ostatnich równań:

$$-m(m+n) + m^2 = \frac{1}{3}p,$$
$$-m(m^2 + mn + n^2) + m^3 = q.$$

Po uproszczeniach otrzymujemy:

$$mn = -\frac{1}{3}p,$$
$$m + n = \frac{3q}{p},$$

przyczem zakładamy, że $p \neq 0$. (Przypadek, gdy $p = 0$, daje równanie $x^3 + q = 0$, którego rozwiązanie nie nasuwa trudności).

Wartości m i n znajdziemy jako pierwiastki równania kwadratowego

$$u^2 - \frac{3q}{p}u - \frac{1}{3}p = 0. \tag{6}$$

Jeżeli się okaże, że równanie to ma wyróżnik *dodatni*, to posiada ono dwa pierwiastki *nierówne*. Przyjmując jeden z nich za m, a drugi za n, łatwo będziemy mogli wyznaczyć wartości A i B, mianowicie

$$B = \frac{-m}{m-n}, \qquad A = \frac{-n}{m-n}.$$

Podstawiając te wartości do równania (4) i mnożąc to równanie obustronnie przez $\sqrt[3]{m-n}$, otrzymamy równanie

$$-\sqrt[3]{n}(x+m) + \sqrt[3]{m}(x+n) = 0.$$

Stąd mamy po uporządkowaniu równanie w postaci:

$$(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})x = m\sqrt[3]{n} - n\sqrt[3]{m}.$$

Przekształcając prawą stronę, będziemy mieli:

$$(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})x = \\ = \sqrt[3]{mn}(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}),$$

a więc ostatecznie będziemy mieli

$$x = \sqrt[3]{mn}(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}). \tag{7}$$

Podstawiając do tego wzoru wartości m i n, wyznaczone z równania (6), otrzymamy wzór, znany pod nazwą wzoru **Cardana**.

Brakuje nam liter

Tomasz M. RUSIN

Czy zauważyliście, jak często w problemach fizycznych (choćby tych publikowanych w *Delcie*) znaleźć można sformułowanie w rodzaju „punkt materialny o masie m porusza się z prędkością $\mathbf{v}$ ...”? Wydawać by się mogło, że oznaczenie masy jakąkolwiek inną literą niż m jest po prostu niemożliwe! Skąd bierze się takie przywiązanie fizyków do pewnych oznaczeń? Cóż, po części jest to kwestia wygody i przyzwyczajenia. Po części jednak problem jest nieco bardziej skomplikowany i ma wszelkie cechy problemu „zbyt krótkiej kołdry”.

Gdy powstawała fizyka w jej obecnym kształcie, pojawiły się pojęcia takie, jak prędkość, siła, czas. Ich nazwy kojarzyły się z potocznymi określeniami, których uściślenie stanowiły. Jednocześnie, dla wygody, w rozmaitych równanjach zastępowano same pojęcia ich symbolami. Symbolami tymi były na ogół pierwsze litery odpowiednich nazw; z przyczyn historycznych były to nazwy angielskie (v – *velocity*, prędkość, f – *force*, siła, a – *acceleration*, przyspieszenie itp.). I tak symbole zrosły się z pojęciami stając się niemal ich synonimami. Na przeszkodzie tej idylli stanęła jednak sama przyroda, która nieubłaganie dostarczała wciąż nowych i nowych zjawisk. Do ich opisu zaś niezbędne były nowe pojęcia, coraz częściej nie znajdujące swoich odpowiedników w mowie potocznej. Przed fizykami pojawił się więc nowy kłopot: jak nazwać, ale i jak oznaczyć to, co już odkryli. Oznaczenie takie powinno być krótkie, ale jednoznaczne, dopuszczające przy tym różne warianty tej samej wielkości. Przykładem może tu służyć oznaczenie funkcji falowej w mechanice kwantowej, dla którego zarezerwowano grecką literę ψ. W zależności od kontekstu piszemy $\psi(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_1^2(t)$ itp.

Przykład ten pokazuje zresztą coś nowego: oprócz samego symbolu mamy tu także wskaźniki, które precyzują, co dany symbol oznacza. Wskaźniki mogą występować w czterech polach otaczających symbol:

$${}^{\boxed{1}}_{\boxed{2}}\mathrm{X}^{\boxed{3}}_{\boxed{4}}$$

Obecność wskaźników w każdym z tych pól odczytujemy inaczej. Gdy wskaźnik umieścimy w polach 1 lub 2, będziemy mieć do czynienia z liczbą masową lub atomową pierwiastka X (na szczęście, prawie nikt poza fizykami jądrowymi w tych polach niczego nie zapisuje). Znacznie gorzej sytuacja wygląda dla wskaźnika umieszczonego w polu 3. Liczba 2 tam znajdująca się może np. oznaczać zarówno kwadrat liczby x (tzn. $x^2 = x \cdot x$), jak również drugą składową wektora (x^1, x^2, x^3). Gdybyśmy natomiast ujęli dwójkę w nawiasy, (2), niemal każdy rozpoznałby drugą pochodną funkcji X $\left(X^{(2)} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}X\right)$. Pole 4 zasługuje wreszcie na nazwę śmietnika – wrzuca się tam wszystkie możliwe indeksy. Zapis B_1 może oznaczać indukcję pola magnetycznego B_1 (np. pochodzącą od pierwszego źródła), ale także i pierwszą składową wektora $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$.

Indeksy w symbolach wielkości fizycznych to nie jedyna możliwa komplikacja. Często pojawiają się tam dalsze „ozdobniki”: gwiazdki (X^*), kropki ($\dot{X}$), kreski ($\bar{X}$), daszki ($\hat{X}$), falki ($\tilde{X}$), strzałki ($\vec{X}$) i wszelkie możliwe ich kombinacje. Prowadzić to może do zabawnych nieporozumień. Weźmy np. operację „kropkowania”, czyli różniczkowania względem czasu ($\dot{X} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$) i rozważmy natężenie prądu elektrycznego zwykle oznaczane w elektrotechnice literą i. Co oznacza zapis $\dot{i}$? Na dodatek i jest także matematycznym symbolem jednostki urojonej. Konia z rzędem temu, kto rozszyfruje równanie

$$i\ddot{i} + \dot{i} = i(1+2i)^2.$$

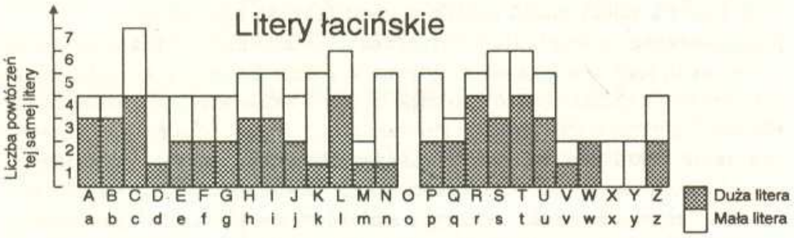
O tym, że nie są to problemy aż tak nieistotne, jak nam się często wydaje, można przekonać się czytając dowolny akademicki podręcznik fizyki.

Czasem aż żal autora, który usiłuje zapisać wzór typu

$$\frac{\text{energia pola}}{\text{jednostka objętości}} = \frac{1}{2}(\text{natężenie pola elektrycznego})^2 ,$$

dobierając różne znaczki przypominające literę E! Sęk jednak w tym, że jednoznaczności jednoliterowych oznaczeń nie da się po prostu osiągnąć.

Zamieszczone wykresy pokazują statystykę używalności rozmaitych liter (greckich i łacińskich) jako standardowych symboli wielkości fizycznych w kilku podręcznikach fizyki. Jak wynika z wykresów, najwięcej używa się do oznaczeń liter łacińskich – 105, z czego 65 przypada na duże i 50 – na małe litery. Średnio każda wielka litera „zajmowana jest" przez 2,17 pojęć fizycznych, mała – przez 1,93 pojęć. Najwięcej pojęć przypada na literę c – 7, najmniej na o – 0 (zapewne, aby uniknąć możliwości pomylenia z zerem). Na tle liter łacińskich użycie liter greckich prezentuje się znacznie skromniej. O ile liczba oznaczeń małymi literami (41) jest porównywalna z analogiczną liczbą dla alfabetu łacińskiego, to już dla dużych liter następuje prawdziwy krach (tylko 10 przypadków zastosowania). Ogólna charakterystyka wykresu przypomina nieco funkcję $f(x) = |\sin x|$ z maksimum dla litery σ (6) i minimum dla ι, o, υ (0).



Liczba dużych liter	55	średnio	2,11	oznaczeń na literę
Liczba małych liter	50	średnio	1,92	oznaczeń na literę
Razem	105	średnio	4,04	oznaczeń na literę

Liczba dużych liter	10	średnio	0,40	oznaczeń na literę
Liczba małych liter	41	średnio	1,84	oznaczeń na literę
Razem	51	średnio	2,00	oznaczeń na literę

Literatura:

1. Resnick, Holiday – ***Wstęp do fizyki***, PWN 1974.
2. ***Słownik fizyczny***, PWN 1986.
3. ***Encyklopedia fizyki współczesnej***, PWN 1984.
4. Landau, Lifszyc – ***Krótki kurs fizyki***, PWN 1986.
5. Notatki z zeszytów autora, 1984 – 1988.

Jak zaradzić brakowi odpowiedniej liczby symboli? Narzucającym się sposobem jest użycie oznaczeń wieloliterowych. Ale (niestety) fizycy są leniwi i nie lubią długich symboli. Mamy więc błędne koło. Jednak, być może, istnieje wyjście z tej sytuacji. Nic nikomu nie sugerując zauważmy, że w języku chińskim występuje około 50 000 znaków pisarskich... A tych, którzy pomyślą, że żartuję, odsyłam do książki Bohra i Mottelsona *Struktura jądra atomowego*.

PS. Zachęcam Czytelników do uzupełnienia zamieszczonej statystyki. Można też poszukać wzorów funkcji (ciągłych) najlepiej przybliżających wykresy.

Redakcja *Młodego Matematyka* opatrzyła artykuł Marka Kaca następującym komentarzem.

Udzielając miejsca sposobowi, przedstawionemu przez p. Marka Katza, który jest uczniem VIII klasy gimnazjalnej Liceum Krzemienieckiego, Redakcja musi dodać kilka uwag.

Autor artykułu ograniczył się do rozważenia przypadku, kiedy wyróżnik równania (6) jest dodatni, czyli przypadku, kiedy wyrażenie

$$\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3 \tag{8}$$

ma wartość dodatnią. Z teorji równania trzeciego stopnia wiadomo, że w tym przypadku równanie (1) posiada jeden pierwiastek rzeczywisty. Metoda, opisana w artykule, odnosi się do znalezienia tego pierwiastka.

W przypadku, kiedy wyrażenie (8) jest zerem, wyróżnik równania (6) jest zerem, a więc równanie to posiada pierwiastek podwójny:

$$m = n = \frac{3q}{2p}.$$

Ale w tym przypadku wzór (7) przybiera postać $x = \frac{3q}{p}$, **i nietrudno sprawdzić przez bezpośrednie podstawienie, że wzór ten daje pierwiastek równania (1).**

W przypadku, kiedy wyrażenie (8) ma wartość ujemną, m **i** n **nie są liczbami rzeczywistemi. Zachodzi tu przypadek, znany pod nazwą *casus irreducibilis*, – tem osobliwy, że w tym przypadku równanie trzeciego stopnia posiada trzy pierwiastki rzeczywiste, ale nie można ich wyznaczyć drogą algebraiczną. Rzecz jasna, że i metoda, opisana przez p. M. Katza, zawodzi w tym przypadku. W samej rzeczy, równanie**

$$(x-1)(x-2)(x+3) = 0$$

posiada trzy pierwiastki: +1, +2, −3. Rozwijając lewą stronę, otrzymujemy równanie

$$x^3 - 7x + 6 = 0,$$

mamy więc wartości: $p = -7$, $q = 6$. **Równanie (6) przybiera postać**

$$u^2 + \frac{6}{7}u + \frac{7}{3} = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że równanie to nie posiada pierwiastków rzeczywistych, a więc nie można wyznaczyć rzeczywistych wartości m **i** n, **skąd jednak nie wynika, by dane równanie trzeciego stopnia nie posiadało pierwiastków.**