# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1991

## Zadania z matematyki nr 223, 224

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

**223.** W trójkącie $ABC$ kąt wewnętrzny przy wierzchołku $C$ ma miarę trzykrotnie większą niż kąt wewnętrzny przy wierzchołku $A$. Dowieść, że wysokość opuszczona z wierzchołka $C$ jest krótsza niż połowa boku $AB$.

**224.** Liczba naturalna $n > 1$ jest dzielnikiem liczby $p-1$, gdzie $p$ jest dzielnikiem pierwszym liczby $n^3-1$. Znaleźć związek między $p$ i $n$ (w postaci równości wielomianowej).

Zadanie 224 zaproponował pan Henryk Pawłowski z Torunia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1991
Przypominamy treść zadań:

**219.** Niech $x_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k}\right)^n$ dla $n=2,3,4,\ldots$ Czy ciąg $(x_n/n)$ jest zbieżny?

**220.** W trójkąt $ABC$ wpisano okrąg styczny do boków tego trójkąta w punktach $P$, $Q$, $R$. Miary kątów trójkąta $ABC$ równe są $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; miary kątów trójkąta $PQR$ wynoszą $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$. Dowieść, że

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \sin\alpha'\sin\beta'\sin\gamma' .$$

**219.** Badany ciąg jest zbieżny. Dowód: przyjmijmy

$$(1)\qquad a_{nk} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)^n, \quad b_{nk} = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n/k}, \quad c_{nk} = b_{nk} - a_{nk}$$

dla $n \ge k \ge 1$. Wykażemy, że

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_{nk} = 0 .$$

W nierówności $1 - t < \mathrm{e}^{-t} < 1 - t + t^2$ (dla $t>0$) podstawiamy $t=1/k$ i podnosimy wszystkie trzy człony do $n$-tej potęgi. Otrzymujemy związki

$$a_{nk} < b_{nk} < \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right)^n .$$

Stąd

$$(3)\qquad 0 < c_{nk} < \phi(\beta_k) - \phi(\alpha_k),$$

$$\text{gdzie } \phi(t) = \frac{1}{n}t^n, \quad \alpha_k = 1 - \frac{1}{k}, \quad \beta_k = 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}.$$

Zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a, $\phi(\beta_k) - \phi(\alpha_k) = (1/k^2)\phi'(\xi) = \xi^{n-1}/k^2$ dla pewnego $\xi \in (\alpha_k;\beta_k)$. Stąd i z (3)

$$(4)\qquad 0 < c_{nk} < \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right)^{n-1}.$$

Wobec tego

$$(5)\qquad 0 < c_{nk} < \frac{1}{k^2} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} c_{nk} = 0 \ \ (\text{dla każdego } k);$$

ostatnia relacja graniczna wynika dla $k\ge 2$ z oszacowania (4), a dla $k=1$ – wprost z definicji (1).

Ustalmy $\varepsilon>0$ oraz taką liczbę naturalną $m$, że $\sum_{k=m+1}^{\infty} 1/k^2 < \varepsilon$ (możemy to zrobić, bo szereg $\sum 1/k^2$ jest zbieżny). Zatem

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk} < \sum_{k=1}^{m} c_{nk} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{m} c_{nk} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

dla dostatecznie dużych $n$; wynika to ze związków (5), bowiem $m$ jest ustalone. Równość (2) jest tym samym udowodniona. Zauważmy teraz, że

$$(6)\qquad \frac{x_n}{n} = \sum_{k=2}^{n} a_{nk} = \sum_{k=1}^{n} a_{nk};$$

natomiast $\sum_{k=1}^{n} b_{nk}$ jest sumą Riemanna funkcji ciągłej

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{dla } x \in (0;1), \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

odpowiadającą podziałowi przedziału $\langle 0;1\rangle$ na $n$ równych części.

Graniczną wartością tej sumy (przy $n \to \infty$) jest całka $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Na mocy (1), (2) i (6) ta sama liczba jest też granicą badanego ciągu $(x_n/n)$. Jej przybliżona wartość: 0,1484955... (Liczba ta dopuszcza i inne przedstawienia całkowe, ale nie wyraża się przez funkcje elementarne i znane stałe.)

**220.** Możemy przyjąć, że punkty $P$, $Q$, $R$ leżą odpowiednio na bokach $BC$, $CA$, $AB$, oraz że $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ są odpowiednio miarami kątów $A$, $B$, $C$, $P$, $Q$, $R$ rozważanych trójkątów. Mamy więc równość

$$\begin{aligned} 180^\circ &= |\angle BPR| + |\angle RPQ| + |\angle QPC| = \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) + \alpha' + \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma). \end{aligned}$$

Stąd $\alpha' = (\beta+\gamma)/2$, a zatem

$$\begin{aligned} \sin\alpha' &= \sin\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \ge \\ &\ge 2\sqrt{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = \sqrt{\sin\beta\sin\gamma} \end{aligned}$$

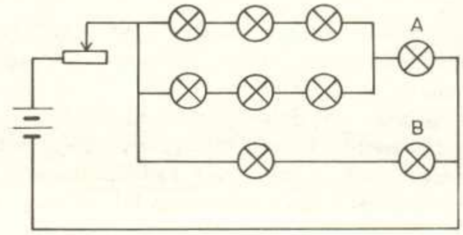
i analogicznie $\sin\beta' \ge \sqrt{\sin\gamma\sin\alpha}$, $\sin\gamma' \ge \sqrt{\sin\alpha\sin\beta}$. Mnożąc stronami te trzy nierówności uzyskujemy tezę zadania.

## Zadania z fizyki nr 121, 122

*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

**121.** Astronauci podróżujący rakietą w przestrzeni kosmicznej nagle wykrywają pocisk znajdujący się w odległości $r$ i poruszający się wprost w ich kierunku z prędkością (względną) $v$. Pocisk nie ma napędu i jest zaprogramowany tak, że wybucha w chwili największego zbliżenia do rakiety. W jakim kierunku astronauci powinni skierować dyszę silnika, aby minimalna odległość od pocisku miała wartość maksymalną? Przyjąć, że rakieta z włączonym silnikiem porusza się ze stałym przyspieszeniem $a$. Załóżmy teraz, że pocisk nie wybucha, ale wysyła promienie $\gamma$. Czy opisany powyżej optymalny kierunek dyszy gwarantuje także pochłonięcie najmniejszej dawki?

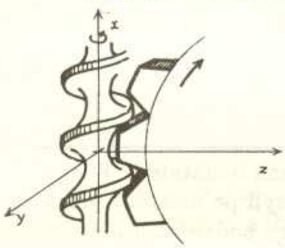
**122.** W obwodzie przedstawionym na rysunku wszystkie żaróweczki są jednakowe. Jakim wzorem wyraża się zależność prądu przepływającego przez żaróweczkę od przyłożonego napięcia, jeśli żaróweczka A pali się tak samo jasno jak B, przy każdym nastawieniu potencjometru?



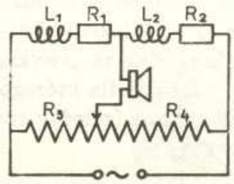

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1991

**Przypominamy treść zadań:**

**117.** Jaka jest maksymalna możliwa wartość sprawności przekładni ślimakowej (rys.), jeśli współczynnik tarcia zębów jest równy $f$?




**118.** W przedstawionym obwodzie suwak przesuwano wzdłuż opornika $R_3 - R_4$ do uzyskania minimum dźwięku. Wykazać, że na ogół dźwięk nie zanika całkowicie przy żadnym położeniu suwaka. Jaki warunek musi być spełniony, aby dźwięk zanikł?




**117.** Przyjmijmy, że oś obrotu pierwszego koła (napędowego) pokrywa się z osią $x$, a oś obrotu drugiego koła – z osią $y$; wtedy w punkcie zazębienia zęby pierwszego koła poruszają się w kierunku osi $y$, a zęby drugiego – w kierunku osi $x$. Oznaczmy przez $\mathbf{n}$ jednostkowy wektor prostopadły do płaszczyzny zetknięcia się zębów obu kół:

$$\mathbf{n} = (\cos\Theta\cos\phi,\ \cos\Theta\sin\phi,\ \sin\Theta),$$

tzn. kąt $\phi$ wskazuje nachylenie zębów w płaszczyźnie $xy$, a kąt $\Theta$ opisuje odchylenie w kierunku trzeciej osi $z$. Jeśli $\Delta y$ oznacza małe przesunięcie zębów pierwszego koła, a $\Delta x$ – drugiego, to wektor przesunięcia względnego (poślizgu) będąc różnicą wektorową tych przesunięć jest dany wyrażeniem

$$\mathbf{t} = (\Delta x, -\Delta y, 0)$$

i musi być prostopadły do wektora $\mathbf{n}$. Stąd

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \mathrm{tg}\phi .$$

Siłę wzajemnego oddziaływania zębów $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ możemy rozłożyć na składową normalną $\mathbf{F_n} = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ i składową styczną $\mathbf{F_{st}} = \mathbf{F} - \mathbf{F_n}$. Ponieważ $\mathbf{F_{st}}$ jest równoległa do wektora $\mathbf{t}$, więc siła ta nie ma składowej $z$, czyli $F_z = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})n_z$. Korzystając z tego związku możemy obliczyć długość wektorów $\mathbf{F_n}$ i $\mathbf{F_{st}}$ eliminując z równań $F_z$.

$$F_n = |\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}| = \frac{|F_x n_x + F_y n_y|}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}}, \quad F_{st} = \frac{|F_y n_x - F_x n_y|}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}} .$$

Stosunek $F_{st}/F_n$ jest współczynnikiem tarcia $f$. Gdy pierwsze koło jest napędowe, a drugie odbiera energię, należy podstawiając tu otrzymane wyrażenia na $F_n$ i $F_{st}$ pominąć moduły. Dalsze przekształcenia prowadzą do wzoru

$$F_x = F_y \frac{\cos\phi - h\sin\phi}{\sin\phi + h\cos\phi}, \quad \text{gdzie} \quad h = \frac{f}{\cos\Theta}$$

(przekładnia może działać tylko wtedy, gdy licznik jest dodatni). Praca koła napędowego jest równa $F_y\Delta y$, a praca drugiego koła – $F_x\Delta x$. Stosunek tych dwóch wyrażeń jest sprawnością przekładni $\eta$.

$$\eta = \frac{F_x\Delta x}{F_y\Delta y} = \frac{\cos\phi - h\sin\phi}{\sin\phi + h\cos\phi}\cdot\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{\sin 2\phi + h(\cos 2\phi - 1)}{\sin 2\phi + h(\cos 2\phi + 1)} .$$

Sprawność jest tym większa, im mniejsze jest $h$, zatem w optymalnym przypadku $\Theta=0$, $h=f$. Aby obliczyć optymalną wartość $\phi$, korzystnie jest przekształcić

$$\frac{2f}{1-\eta} = \sin 2\phi + f(\cos 2\phi + 1)$$

i teraz przyrównać pochodną względem $\phi$ do zera. Ostatecznie otrzymujemy $\mathrm{tg}2\phi = \frac{1}{f}$ i

$$\eta_{max} = \frac{\sqrt{1+f^2} - f}{\sqrt{1+f^2} + f} .$$

**118.** Gdy głośnik nie daje żadnego sygnału, nie przepływa przez niego żaden prąd i nie ma też na nim żadnego napięcia, tzn. napięcia w górnej gałęzi równają się odpowiednim napięciom w dolnej gałęzi:

$$U_{L_1R_1} = U_{R_3}, \qquad U_{L_2R_2} = U_{R_4} .$$

Znikanie napięcia na głośniku zachodzi tylko wtedy, gdy powyższa równość dotyczy zarówno amplitud, jak i faz napięć. Zastosujmy więc metodę liczb zespolonych i podstawmy zespolone zawady cewek i podzielmy równania stronami

$$\frac{L_1\omega i + R_1}{L_2\omega i + R_2} = \frac{R_3}{R_4} . \tag{1}$$

Rozpatrując oddzielnie część rzeczywistą i urojoną lewej strony dochodzimy do warunku

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} . \tag{2}$$

Konieczny jest więc nie tylko dobór odpowiednich wartości $R_3$ i $R_4$, lecz także spełnienie lewej równości (2) (oczywiście, równanie (1) może być spełnione także przy $R_1 = R_2 = 0$).