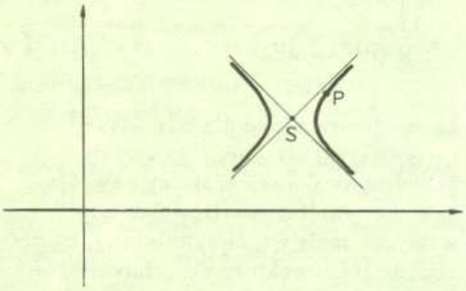
Następne spostrzeżenie dotyczy wyglądu okręgów. Okrąg to zbiór punktów jednakowo oddalonych od danego punktu. Ma więc równanie

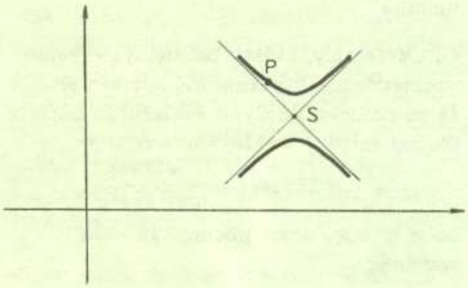
$$\|x - s\| = \|p - s\| .$$

Rozpisując to na współrzędne mamy

$$(x_1 - s_1)^2 - (x_2 - s_2)^2 = \\ = (p_1 - s_1)^2 - (p_2 - s_2)^2 = \lambda .$$

Równanie to na ogół opisuje hiperbolę.

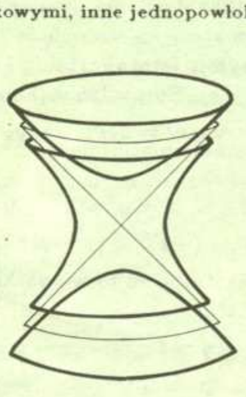




Nie otrzymujemy hiperboli, gdy $p = s$ lub odcinek ps jest izotropowy – wtedy jest to para prostych izotropowych.

Widać, że przez środek każdego okręgu przechodzi bardzo wiele prostych nie przecinających go. Morał stąd taki, że dany odcinek można odkładać tylko na niektórych prostych – na innych się nie da.

W artykule *Szybciej niż światło* można znaleźć rysunek bardzo podobny do powyższego. Warto jednak pamiętać, że różne okręgi tylko na czasoprostej są tego samego rodzaju. Czytelnik zechce sprawdzić, że już na czasopłaszczyźnie wygląd okręgu zależy od znaku λ. Jedne są hiperboloidami dwupowłokowymi, inne jednopowłokowymi.



Ruch peryastronu (peryhelium)

Tadeusz JARZĘBOWSKI

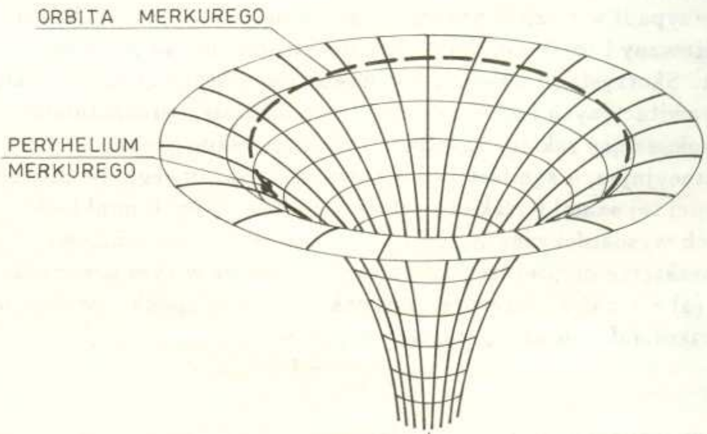
Jeszcze w latach sześćdziesiątych ogólną teorią względności Einsteina, czyli teorią grawitacji, zajmowali się raczej matematycy; dziś tematyka ta pojawia się w pracach eksperymentalnych, interesują się nią astrofizycy obserwatorzy. Odkrywa się w kosmosie obiekty, stanowiące wspaniałe „laboratoria grawitacyjne" (patrz artykuł pod takim tytułem w *Delcie* 10/1990), które stwarzają możliwości obserwowania przewidywanych przez teorię zjawisk.

W tym artykule bliżej o jednym z tych zjawisk, o przesuwaniu się punktu peryhelium (w stosunku do którego, w przypadku krążenia wokół gwiazdy, używane jest określenie: peryastron).

To, że ciała niebieskie wzajemnie się obiegają po orbitach eliptycznych, wiemy od czasów Keplera, tj. od już blisko czterech stuleci. Zdawałoby się, że jeżeli nie działają żadne siły zewnętrzne, to w takim odosobnionym układzie orbita powinna być niezmienna zarówno pod względem kształtu, rozmiarów jak i orientacji. Tak przynajmniej wyobrażał to sobie odkrywca prawa ciążenia powszechnego – Newton; do takiego wniosku prowadziłoby też zresztą elementarne rozumowanie.

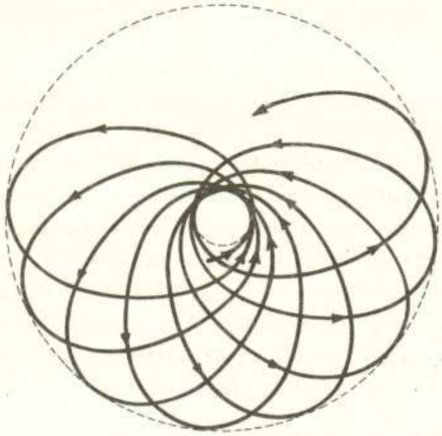
Tę niezmienność zakwestionował jednak Einstein. Dla ilustracji problemu weźmy pod uwagę wynikający ze szczególnej teorii względności fakt wzrostu masy wraz z prędkością. A wiadomo, że prędkość ciała na orbicie eliptycznej jest zmienna. W przypadku Ziemi oscyluje ona między 29,3 a 30,3 km/s. Z tą największą prędkością biegnie Ziemia, gdy jest najbliżej Słońca, tj. w peryhelium (co ma miejsce około 3 stycznia). A zatem w styczniu masa Ziemi byłaby większa! Czegoś takiego Newton nie przewidywał.

Właściwa interpretacja zjawiska, o którym chcemy mówić, opiera się na ogólnej teorii względności. Występuje tam pojęcie krzywizny przestrzeni. W sąsiedztwie dużych mas czasoprzestrzeń ulega zakrzywieniu. Ilustruje to rysunek 1, gdzie tym masywnym ciałem jest Słońce, wokół którego krąży planeta. Otóż z teorii tej wynika, że oś orbity nie zachowuje stałego położenia, lecz powinna obracać się w kierunku obiegu planety (rys. 2). Pociąga to, oczywiście, za sobą jednoczesne przesuwanie się punktu peryhelium.



Rys. 1. W myśl ogólnej teorii względności przestrzeń w sąsiedztwie obiektów o dużych masach ulega zakrzywieniu. Ten fakt tłumaczyłby systematyczne skręcanie osi orbity obiegającego ciała – jak to ukazuje rysunek 2.

Zjawisko to powinno wystąpić najwyraźniej w przypadku Merkurego, jako że planeta ta znajduje się najbliżej Słońca i elipsa, po jakiej biegnie dość wyraźnie różni się od okręgu. Teoria wskazuje, że w ciągu stu lat peryhelium Merkurego zmieni swe położenie o $43''$. Dla Wenus, Ziemi i Marsa otrzymamy tu odpowiednio liczby $9''$, $4''$ i $1''$, zaś dla planet dalszych będą to już tylko niemierzalne ułamki sekund.



Rys. 2. Oś keplerowskiej elipsy nie zachowuje stałego położenia, lecz obraca się z wolna w swej płaszczyźnie. Planeta nie biegnie zatem po elipsie, lecz po krzywej otwartej, wypełniającej obszar zawarty między dwoma okręgami, których promienie odpowiadają najmniejszemu i największemu oddaleniu od Słońca.

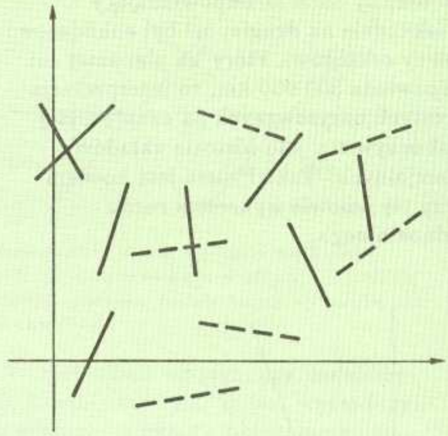
Merkury jest więc w tym aspekcie najciekawszy. Problem „peryhelium Merkurego" był jednym z najważniejszych tematów naszego stulecia.

Z obserwacyjną weryfikacją zjawiska są tu jednak trudności. Skoro układ Słońce – Merkury nie jest odosobniony, należy uwzględnić zaburzenia wywoływane przez inne planety. Otóż po dokonaniu tego typu obliczeń – opartych na mechanice Newtona – okazuje się, że po uwzględnieniu wszelkich wpływów innych obiektów pozostaje rozbieżność: właśnie o owe 43 sekundy na setkę lat. Chciałoby się tylko przyklasnąć Einsteinowi, gdyby nie pewne ale. Szkopuł bowiem w tym, że takie skręcanie osi orbity planety mogłoby też być następstwem spłaszczenia Słońca (pojawiłby się w takim przypadku tzw. grawitacyjny moment kwadrupolowy). Niestety, stopnia spłaszczenia naszej gwiazdy nie można, jak dotąd, wyznaczyć z wystarczającą dokładnością. Nie ma więc do dziś stuprocentowej pewności, że przewidywana przez Einsteina wędrówka peryhelium Merkurego została potwierdzona.

I oto w atmosferze takiej rozterki, *Anno Domini* 1974, pojawia się na arenie astronomicznych sensacji inny układ dwóch ciał niebieskich, gdzie dyskutowany tu efekt występuje w całej krasie i gdzie nie ma już wątpliwości co do einsteinowskiego rodowodu zjawiska. Nazwa nowo odkrytego beniaminka brzmi trochę niezbyt swojsko: PSR 1913+16. To parka gwiazd znajdujących się w gwiazdozbiorze Orła – ale niech nikt nie próbuje szukać ich na niebie. Swą obecność ujawniają one w zakresie fal radiowych i to bardzo skromniutko, jako że dzieli nas od nich odległość aż około piętnastu tysięcy lat świetlnych.

Są to dwie gwiazdy neutronowe, z których jedna jest pulsarem o okresie rotacji 0,06 sekundy. Obiegają się nawzajem (mówiąc poprawniej: obiegają wspólny środek masy) w ciągu 7 godzin i 45 minut po mocno eliptycznych orbitach (mimośród $e = 0,617$). Powinniśmy zdawać sobie sprawę, iż tak krótki okres, zwłaszcza

Odcinki zatem podzieliły się nam na trzy klasy: odcinki izotropowe (każdy z nich ma długość zero!), odcinki bardziej nachylone do pierwszej osi (i dające się między sobą porównywać) i odcinki bardziej nachylone do drugiej osi (też porównywalne, lecz nie porównywalne z poprzednimi).



Przyjrzyjmy się jeszcze kątom prostym. Wzór na prostopadłość ma postać

$$x_1y_1 = x_2y_2\,,$$

z czego wynika, że wektorem prostopadłym do $[a,b]$ jest wektor $[b,a]$ i wszystkie równoległe do niego. Oznacza to, że na euklidesowym obrazku dwie proste na czasoprostej są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne utworzonego przez nie kąta są izotropowe. A więc jeden kąt prosty może zawierać mniejszy od niego kąt prosty o tym samym wierzchołku.

Wektory, które zostały narysowane równej długości, są prostopadłe.

Odnosząc to do sławnej aksjomatyki Euklidesa można powiedzieć, że tym razem skonstruowano geometrię, w której nie piąty aksjomat, lecz czwarty (głoszący, że dowolne dwa kąty proste są równe) został naruszony.

w przypadku obiegających się gwiazd, wskazuje na ich bliskość; ich wzajemne oddziaływanie grawitacyjne musi być zatem znaczne.

Jeśli Einstein miał rację, to osie orbit powinny podlegać systematycznemu skręcaniu, a tempo zmian powinno tu być bardzo wyraziste. Teoria podaje następującą zależność

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{64G^{2/3}}{c^2} \frac{M^{2/3}}{(1-e)P^{5/3}},$$

gdzie M oznacza sumę mas obydwu ciał, zaś P okres ich wzajemnego obiegu.

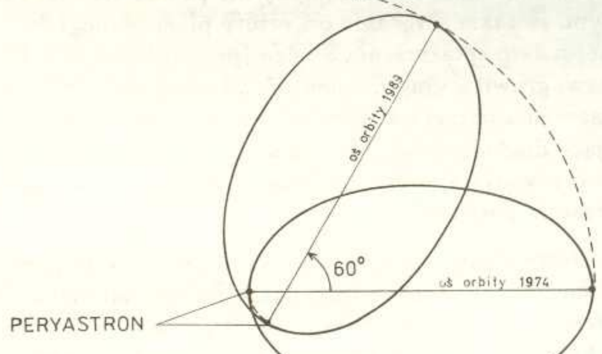
Aby uświadomić sobie wielkość tej zmiany kierunku osi, $d\omega/dt$, dokonajmy prostego porównania z danymi dla układu Słońce – Merkury. Okres obiegu tej planety wynosi 88 dni, tu zaś mamy $P = 0,323$ dnia; stosunek okresów obiegu ma się zatem jak 1 do 272. Po podniesieniu do potęgi 5/3 pojawia się w mianowniku liczba aż 11 tysięcy razy mniejsza niż w przypadku Merkurego. Uwzględniając jeszcze różnice w masach i mimośrodach otrzymujemy wynik dość zaskakujący. Jeżeli bowiem w przypadku Merkurego orbita skręca się o nieco ponad cztery dziesiąte sekundy na rok, to tu powinno być około cztery stopnie na rok!

Tak wynika z obliczeń, a co wynika z obserwacji?

Promieniowanie radiowe tego układu gwiazd neutronowych obserwuje się już od kilkunastu lat. Dzięki temu, że jeden ze składników jest pulsarem emitującym rytmiczne sygnały, możliwe jest wszechstronne badanie ruchów tych gwiazd. Otóż stwierdzono, że od czasu odkrycia tego układu osie orbit zdążyły skręcić się o ponad 60°; o taki sam kąt przesunęły się zatem punkty peryastronu (rys. 3). Tempo tego relatywistycznego skręcania osi, wyznaczone na podstawie danych obserwacyjnych z lat 1974 – 1989, wynosi

$$\frac{d\omega}{dt} = 4,2266 \text{ stopni na rok}.$$

Dokładność pomiarów jest bardzo wysoka; błąd dopiero na piątym miejscu po przecinku.

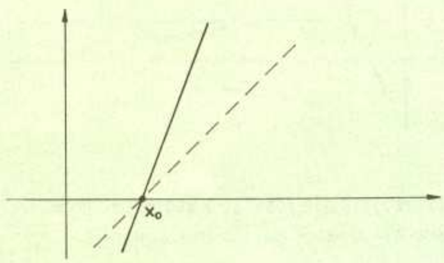


Rys. 3. W układzie podwójnym PSR 1913+16 orbita każdej z gwiazd uległa w ciągu piętnastu lat skręceniu o około 60°.

Nawiążmy raz jeszcze do Merkurego. Jak łatwo obliczyć, na obrót orbity tej planety o kąt pełny należałoby czekać aż 3 miliony lat. Tu natomiast obrót orbity o 360° następuje po każdych 85 latach – mieści się zatem prawie w granicach życia jednego człowieka.

Jak widzimy, w obszarach o silnym polu grawitacyjnym odstępstwa od praw fizyki Newtona są bardzo wyraźne. Jaskrawym tego przykładem jest ta niezwykła parka z pulsarem PSR 1913+16.

Aby uzasadnić zarzut, że uprawianie takiej geometrii przez fizyków zawęża obraz, trzeba przejść do interpretacji fizycznej pojęć czasoprostej (czy ogólniej: czasoprzestrzeni). Jeśli wyobrazimy sobie, że jedna z osi reprezentuje (jednowymiarową) przestrzeń, a druga czas, oraz że jednostki dobrano w ten sposób, by odcinek odpowiadający 1 sekundzie na drugiej osi był euklidesowo równy odcinkowi, który na pierwszej osi odpowiada 300 000 km, to interpretacja prostych narysowanych na czasoprostej jest oczywista – to historie układów inercjalnych. Tak! Prosta jest bowiem przy tej umowie wykresem ruchu jednostajnego.



Na obrazku widać historię punktu poruszającego się ze stałą prędkością po pierwszej osi w kierunku zgodnym z jej orientacją. W chwili $t = 0$ punkt był w x_0.

Łatwo jednak zauważyć, że są wśród nich takie, które opisują ruch z prędkością większą od prędkości światła. Przyjmując (geometrycznie nie dający się uzasadnić) postulat, że układ inercjalny w każdym innym układzie inercjalnym ma prędkość nie większą od prędkości światła, ograniczamy zbiór interesujących fizyka prostych tylko do tych, które są bardziej nachylone do drugiej osi. Albo równoważnie – interesować nas będą tylko odcinki o długości urojonej.

Idąc dalej i żądając, by każdy układ (już niekoniecznie inercjalny) poruszał się wolniej niż światło, z każdym punktem wiążemy figurę złożoną ze wszystkich punktów, mogących należeć do historii układu, który znalazł się (gdzieś, kiedyś) w naszym punkcie. Figura ta nazywa się stożkiem przeszłość-przyszłość.