Manowce analogii

Józef BANAŚ

Bardzo często obiektem badań matematycznych są różnego typu przestrzenie, np. przestrzeń liniowa, przestrzeń metryczna, przestrzeń Banacha, przestrzeń Riemanna itp. Jeśli chcemy w ramach naszych badań „zajrzeć" głębiej w strukturę jakiejś przestrzeni, musimy poznać wiele jej różnorodnych własności i obowiązujących w niej reguł. Mówiąc obrazowo, musimy nauczyć się żyć w tej przestrzeni. Musimy zarazem pamiętać o tym, że zmieniając obiekt naszych badań, czyli „przenosząc się" do innej przestrzeni, powinniśmy pozbyć się „starych przyzwyczajeń", gdyż w nowej przestrzeni obowiązują już inne warunki, rządzą nią nowe reguły i prawa.

Dla zilustrowania powyższej wypowiedzi zajmiemy się pewnym problemem geometrycznym.

Załóżmy, że $\mathbf{E}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$. Będziemy, jak to już tradycyjnie jest przyjęte, oznaczać wektory z $\mathbf{E}$ literami łacińskimi, skalary zaś z $\mathbf{R}$ literami greckimi. Przypomnijmy, że odcinkiem o końcach $x, y \in \mathbf{E}$ nazywamy zbiór $\overline{xy}$ taki, że $\overline{xy} = \{\alpha x + (1-\alpha)y : \alpha \in [0,1]\}$, a środkiem odcinka $\overline{xy}$ – punkt $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ z tego odcinka. Zbiór X ($X \subset \mathbf{E}$) nazywamy wypukłym, jeśli wraz z każdymi dwoma punktami zawiera łączący go odcinek.

W dalszym ciągu załóżmy, że w przestrzeni $\mathbf{E}$ określona jest norma $||\cdot||$, tzn. $\mathbf{E}$ jest przestrzenią unormowaną. Oczywiście, norma ta indukuje metrykę na $\mathbf{E}$, określoną w ten sposób, że za odległość punktów $x, y \in \mathbf{E}$ przyjmujemy $||x - y||$.

Gdy ktoś nie lubi normy (np. dlatego, że nie zna tego pojęcia), może wyobrazić sobie normę punktu $x \in \mathbf{E}$ jako odległość punktu x od punktu $(0, \ldots, 0)$. Podobnie słowo metryka może być zastąpione przez odległość pod warunkiem, że będzie się pamiętało, iż odległość można mierzyć na różne sposoby.

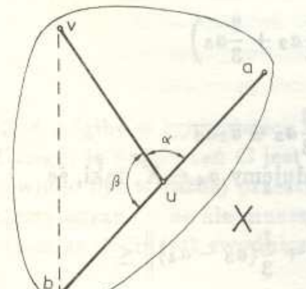
Jeżeli X jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni $\mathbf{E}$, to średnicą zbioru X nazywać będziemy kres górny zbioru odległości jego punktów ($\sup\{||x-y|| : x, y \in X\}$) i oznaczać symbolem $\operatorname{diam} X$.

Załóżmy następnie, że X jest wypukłym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni unormowanej $\mathbf{E}$, takim że $\operatorname{diam} X > 0$. Punkt $x \in X$ nazywać się będzie punktem diametralnym zbioru X, jeżeli $\sup\{||x-y|| : y \in X\} = \operatorname{diam} X$. Jeżeli natomiast dla punktu x mamy $\sup\{||x-y|| : y \in X\} < \operatorname{diam} X$, to x nazywa się punktem niediametralnym zbioru X.

Postawmy teraz następujące pytanie: Czy w każdym wypukłym i ograniczonym podzbiorze X przestrzeni $\mathbf{E}$, takim, że $\operatorname{diam} X > 0$, znajdują się punkty niediametralne tego zbioru?

Intuicja związana z naszymi doświadczeniami geometrycznymi sugeruje, że tak być powinno. Inaczej bowiem zbiór X byłby „dziurawy", co kłóci się z założeniem o jego wypukłości.

Na zwykłej płaszczyźnie przykładem figury złożonej z samych punktów diametralnych jest zbiór wierzchołków jakiegoś wielokąta foremnego (np. kwadratu); oczywiście, nie jest to zbiór wypukły. Podobnie okrąg.



Rys. 1

Spróbujmy to jednak udowodnić. Oczywiście, naszych doświadczeń geometrycznych nabywamy w przestrzeni $\mathbf{R}^2$ z normą euklidesową, $||x|| = ||(x_1, x_2)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (inaczej: na płaszczyźnie z euklidesowym sposobem mierzenia odległości punktów). Niech $X \subset \mathbf{R}^2$ będzie zbiorem ograniczonym, wypukłym i niech $\operatorname{diam} X = d > 0$. Ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon \in (0; d/10)$ i znajdźmy w X dwa punkty a, b, takie, żeby $||a - b|| \geq d - \varepsilon$ (jest to możliwe wobec definicji d). Niech u oznacza środek odcinka $\overline{ab}$ (por. rys. 1).

Rozmowa o średnich,

czyli ponowne odkrywanie MatAmeryki

Andrzej OLEJNICZAK, Krzysztof OMILJANOWSKI

Ten tekst jest próbą wiwisekcji, próbą ukazania, jak się robi matematykę, próbą pokazania, jak się myśli (a raczej, jak autorzy to robili – wszak to bardzo indywidualna sprawa). Najmniej istotna jest tu treść matematyczna, znana i raczej błaha. Nie o nią tu chodzi (w tytule akcent jest położony na słowo „rozmowa", a nie na „o średnich").
Tekst ten ma (w zamiarze) propagować nie wiedzę matematyczną, lecz formę jej zdobywania.
Ponadto:
– nieścisłości są jak najbardziej zamierzone (w przeciwieństwie do błędów);
– pojawiające się słowo ćwiczenie jest sugestią pracy własnej dla tych Czytelników, którzy chcą ten tekst traktować (mimo wszystko) jako matematyczny;
– w zbliżonej formie materiał ten był prezentowany (przez drugiego z autorów) jako odczyt dla młodzieży organizowany przez Oddział Wrocławski PTM.

Poniższa rozmowa autorów – układających zadania dla studentów – zaczęła się od następującego zadania:

Zadanie 1. Dla liczb p, q $(0 < p < q)$ definiujemy ciągi $\{a_n\}, \{b_n\}$ następująco: $a_1 = p$, $b_1 = q$, a_{n+1} jest średnią harmoniczną a_n, b_n, czyli $a_{n+1} = \dfrac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$, b_{n+1} jest średnią arytmetyczną a_n, b_n, czyli $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Wykazać, że ciągi te są zbieżne do średniej geometrycznej liczb p, q, czyli do $\sqrt{pq}$.

– To zadanie jest trochę za trudne na egzamin. A może takie?

Zadanie 2. Dla liczb p, q $(p < q)$ definiujemy ciąg $\{a_n\}$ następująco: $a_1 = p$, $a_2 = q$, $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$. Zbadać zbieżność tego ciągu.

– Tak, ale to zadanie było na zajęciach. (Okazuje się, że dla $p = 0$, oraz $q = 1$ zapisanie pierwszych kilku wyrazów w układzie dwójkowym daje wyraźną wskazówkę ćwiczenie.) Trzeba wymyślić coś prostszego!

– Mam:

Zadanie 3. Dla liczb p,q $(0<p<q)$ definiujemy ciąg $\{a_n\}$ następująco:
$a_1 = p,\ a_2 = q,$

$$(*)a \qquad a_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Zbadać zbieżność tego ciągu.

– Ciekawe zadanie; jak się do tego zabrać?
– Wypiszmy pierwszych kilka wyrazów. Oj, nie mamy nic do pisania!
– W takim razie spróbujmy to sobie wyobrazić geometrycznie: mamy dwa wektory $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ (o wspólnym początku). Wtedy $\overrightarrow{a_3}$ wskazuje na środek (ciężkości) odcinka łączącego końce wektorów $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$. Zatem $\overrightarrow{a_4}$ wskazuje na środek ciężkości trzech jednakowych (punktowych) mas umieszczonych w końcach $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ ćwiczenie; czyli $\overrightarrow{a_4} = \overrightarrow{a_3}$. Jasne, że dalej będzie tak samo; czyli $\overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{a_4} = \overrightarrow{a_5} \ldots$ *Niespodziewane, prawda?*
– A co będzie z *Zadaniem* 3, gdy w (*)a w miejsce średniej arytmetycznej wstawimy średnią geometryczną:

$$(*)g \qquad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\,.$$

– Rachować? To nudne. Spróbujmy pokombinować:

$$a_{n+1} = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n},$$

$$\log a_{n+1} = \frac{1}{n}\log(a_1 a_2 \ldots a_n),$$

$$\log a_{n+1} = \frac{\log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_n}{n}.$$

– Zatem logarytmy wyrazów tego ciągu tworzą ciąg taki, jak w pierwszej wersji *Zadania* 3. Czyli i tym razem $a_3 = a_4 = a_5 = \ldots$
– Zapewne też tak jest dla średniej harmonicznej.
– Zaraz, zaraz. Średnia harmoniczna dwóch liczb występowała w *Zadaniu* 1, ale by mieć analogię do *Zadania* 3, trzeba obliczać średnią harmoniczną trzech (i więcej) liczb. Nie pamiętam, jak się ją określa!
– Ja też. Kojarzy mi się to z jakimś prawem z elektryczności (opór zastępczy?), gdzie jest mowa o odwrotnościach. Zobaczmy:

$$a_3 = \frac{2a_1a_2}{a_1+a_2} = \frac{2}{\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}} = \\ = \frac{2}{\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_1}} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}{2}}.$$

Przypuśćmy, że u jest diametralny. Wtedy istniałby punkt $v \in X$, taki, że $||v-u|| \geq d-\varepsilon$. Oczywiście, jeden z kątów α i β, zaznaczonych na rysunku 1, musi być nie mniejszy niż $\pi/2$ i niech to będzie np. β. Korzystając z twierdzenia cosinusów mamy:

$$||v-b||^2 = ||v-u||^2 + ||u-b||^2 - 2||v-u||\cdot||u-b||\cos\beta \geq \\ \geq ||v-u||^2 + ||u-b||^2.$$

(bo $\cos\beta \leq 0$)

Stąd

$$||v-b||^2 \geq (d-\varepsilon)^2 + \left(\frac{d-\varepsilon}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}(d-\varepsilon)^2 > \frac{5}{4}\left(d-\frac{d}{10}\right)^2 > d^2,$$

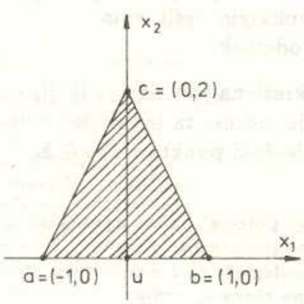
a więc

$$||v-b|| > d\,.$$

Jest to jednak sprzeczne z tym, że diam $X = d$. Zatem u jest punktem niediametralnym dla zbioru X.

Poprzez analogię można by oczekiwać, że tak będzie również wtedy, gdy przestrzeń $\mathbf{R}^2$ wyposażymy w inną normę (inny sposób mierzenia odległości). I rzeczywiście, analogia ta jest poprawna, ale nie do końca, ponieważ dowód wyżej przeprowadzony nie zawsze daje oczekiwany efekt. Weźmy bowiem w $\mathbf{R}^2$ normę maksimum:

$$||(x_1,x_2)||_m = \max\{|x_1|,|x_2|\}.$$



Rys. 2

Rozważmy w $\mathbf{R}^2$ zbiór T – trójkąt o wierzchołkach $(1;0), (-1;0)$ i $(0;2)$ (rys. 2). Oczywiście, diam $T = 2$ oraz $||a-b||_m = 2$. Ale punkt u, będący środkiem odcinka $\overline{ab}$, nie jest już teraz tak „dobry" jak poprzednio, ponieważ $||u-c||_m = 2$.

Niemniej jednak zbiory ograniczone i wypukłe w $\mathbf{R}^2$ z metryką maksimum mają punkty niediametralne. A oto dowód.

Przypuśćmy, że wszystkie punkty zbioru X są diametralne. Niech $a_1, a_2 \in X$ będą takie, że $||a_1 - a_2|| \geq d-\varepsilon$ (będziemy dalej opuszczać m przy symbolu normy), gdzie $\varepsilon > 0$ jest odpowiednio małe. Ponieważ środek u_1 odcinka $\overline{a_1a_2}$ jest diametralny, więc znajdziemy punkt $a_3 \in X$, taki, że $||a_3 - u_1|| \geq d - \varepsilon/2$. Stąd mamy, że

$$d-\varepsilon/2 \leq \left\|a_3 - \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2\right\| \leq \frac{1}{2}||a_3-a_1|| + \frac{1}{2}||a_3-a_2||.$$

Zatem

$$2d-\varepsilon \leq ||a_3-a_1|| + ||a_3-a_2||.$$

Stąd, ponieważ $||a_3-a_2|| \leq d$, więc $||a_3-a_1|| \geq d-\varepsilon$. Podobnie $||a_3-a_2|| \geq d-\varepsilon$.

W poprzednim dowodzie podaliśmy, co znaczyło w nim „odpowiednio małe" – było to „mniejsze od $d/10$". Tutaj pozostawiamy Czytelnikowi określenie, dla jak małego ε dowód będzie przebiegał pomyślnie.

Weźmy teraz punkt $u_2 = \frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)$. Zauważmy, że $u_2 \in X$, bowiem wystarczy zapisać

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3\right)$$

i zauważyć, że

$$\frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 \in \overline{a_1a_2}, \quad \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3 \in \overline{a_2a_3}.$$

Ponieważ punkt u_2 jest diametralny, więc znajdujemy $a_4 \in X$, taki, że $||u_2 - a_4|| \geq d-\varepsilon/3$. Dalej mamy:

$$d-\varepsilon/3 \leq \left\|\frac{1}{3}(a_1-a_4) + \frac{1}{3}(a_2-a_4) + \frac{1}{3}(a_3-a_4)\right\| \leq \\ \leq \frac{1}{3}||a_1-a_4|| + \frac{1}{3}||a_2-a_4|| + \frac{1}{3}||a_3-a_4||.$$

Stąd, podobnie jak poprzednio, wnioskujemy, że

$$||a_4 - a_i|| \geq d - \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3.$$

Załóżmy dalej, że przedłużamy naszą procedurę indukcyjnie. Wtedy skonstruujemy taki ciąg $\{a_n\}$ punktów z X, że

$$||a_i - a_j|| \geq d - \varepsilon \qquad \text{dla } i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots$$

Ponieważ ciąg $\{a_n\}$ składa się z punktów zbioru X, więc jest ograniczony, a zatem musi zawierać podciąg mający w $\mathbf{R}^2$ granicę. Z drugiej strony odległość między jego elementami jest co najmniej $d - \varepsilon$, a to wyklucza zbieżność tak całego ciągu, jak i każdego z jego podciągów. Stąd sprzeczność. Oznacza to, że w zbiorze X są punkty niediametralne.

Zwróćmy uwagę na to, że w powyższym dowodzie nie korzystaliśmy z faktu, że X jest podzbiorem $\mathbf{R}^2$, jak również z tego, że $|| \cdot ||$ była normą maksimum. Istotne było tylko to, że ciąg ograniczony w rozpatrywanej przestrzeni miał podciąg zbieżny. Własność tę nazywa się lokalną zwartością.

Czytelnik, znający nieco więcej analizy, zauważy zapewne, że przeprowadzone rozumowanie implikuje prawdziwość następujących dwóch twierdzeń.

Twierdzenie 1. Każdy relatywnie zwarty i wypukły podzbiór dowolnej przestrzeni unormowanej ma punkty niediametralne.

Twierdzenie 2. Każdy zbiór wypukły i ograniczony w przestrzeni skończenie wymiarowej ma punkty niediametralne.

Teraz, poprzez analogię, można by wyciągnąć wniosek, że zbiór wypukły i ograniczony w dowolnej przestrzeni unormowanej powinien mieć punkty niediametralne. Oczywiście, nie można udowodnić tego tak, jak wyżej, gdzie skorzystaliśmy z lokalnej zwartości przestrzeni skończenie wymiarowych. Należy więc wymyślić inny dowód. Okazuje się jednak, że analogia i intuicja zawodzą nas całkowicie. Rozpatrzmy bowiem przestrzeń $\mathbf{C} = C[0,1]$ złożoną z funkcji $x : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$, ciągłych na przedziale $[0,1]$. Unormujmy tę przestrzeń w klasyczny sposób za pomocą normy maksimum $||x|| = \max\{|x(t)| : t \in [0,1]\}$. W przestrzeni tej rozważmy zbiór

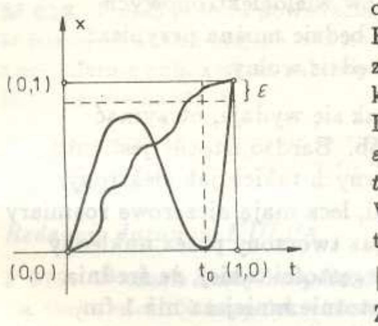
$$X = \{x \in \mathbf{C} :\ 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\}.$$

Jest to więc zbiór złożony z funkcji, których wykresy na płaszczyźnie (t, x) łączą punkt $(0,0)$ z punktem $(1,1)$ i mieszczą się w kwadracie $[0,1] \times [0,1]$ (por. rys. 3). Oczywiście, zbiór X jest ograniczony, wypukły i $\operatorname{diam} X = 1$. Pokażemy teraz, że mimo wypukłości zbiór ten jest bardzo dziurawy, ponieważ każdy jego punkt jest diametralny. Istotnie, weźmy dowolne $x \in X$ oraz $\varepsilon > 0$. Wobec ciągłości funkcji x istnieje t_0 „bliskie" 1, takie, że $x(t_0) > 1 - \varepsilon$. Weźmy dalej dowolną funkcję $y \in X$, taką, że $y(t_0) = 0$. Mamy:

$$||x - y|| \geq |x(t_0) - y(t_0)| = x(t_0) > 1 - \varepsilon.$$

Zatem x jest diametralny.

Koniec dowodu.



Rys.

Ktoś mógłby w tym miejscu stwierdzić, że nasza „sztuczka" udała się dlatego, że przestrzeń $\mathbf{C}$ jest nieskończenie wymiarowa. Analogicznie powinno być w każdej przestrzeni tego typu (w takich przestrzeniach zbiory ograniczone nie muszą być zwarte). Niestety, okazuje się, że i tym razem analogia jest zwodnicza. Ale o tym, być może, innym razem.

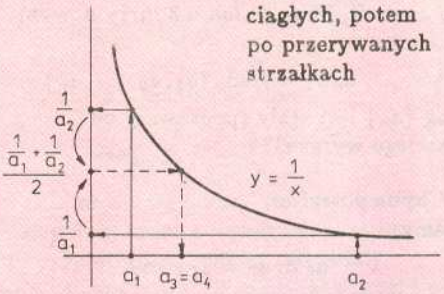
– Teraz jest jasne: średnia harmoniczna jest odwrotnością średniej arytmetycznej odwrotności danych liczb. Zatem w nowej wersji *Zadanie* 3 przyjmie postać:

$$(*)h \qquad a_{n+1} = \frac{1}{\dfrac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}}.$$

– No dobrze, ale jak dowieść, że i tym razem otrzymamy ciąg stały począwszy od trzeciego miejsca?

– Narysujmy kawałek hiperboli:

poruszamy się najpierw po ciągłych, potem po przerywanych strzałkach



– Przy obliczaniu a_4 ciągła strzałka nakryje przerywaną, a na pionowej osi nic się nie zmieni (pierwsza wersja *Zadania* 3). Popatrz uważnie! Mamy $a_4 = a_3$. Dalej też jest dobrze: $a_3 = a_4 = a_5 = \ldots$. *Niespodziewane.*

– To pewnie da się dowieść, że tak jest dla **każdej** średniej!

– Ale **co to jest średnia?** Jak uogólnić, jak wyabstrahować wspólną cechę (tych trzech średnich)?

– Średnia to funkcja (o paskudnej dziedzinie), która n-tkom liczb przypisuje pewne liczby.

– No tak, ale według jakiego sposobu?

– Tak, by *Zadanie* 3 miało – w ogólnej wersji – rozwiązanie uogólniające rozwiązania dla tych konkretnych trzech średnich.

– Ale co to znaczy? To jest *wishful thinking*!

– Może i tak. Spróbujmy choć to zapisać:

$$\text{śred}[a_1, a_2, \ldots, a_n, \text{śred}(a_1, a_2, \ldots, a_n)] = \text{śred}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

– Tak, to by wystarczyło dla *Zadania* 3 ćwiczenie. Niestety, trudno to uznać za aksjomat – jest niezbyt naturalne (wszak niespodziewane dla nas było rozwiązanie pierwszej wersji *Zadania* 3).

– Może tak: gdy $\square$ jest pewnym działaniem (np. dodawaniem, mnożeniem), to s jest średnią (kwadracikową) liczb a_1, a_2, jeśli $s \square s = a_1 \square a_2$.