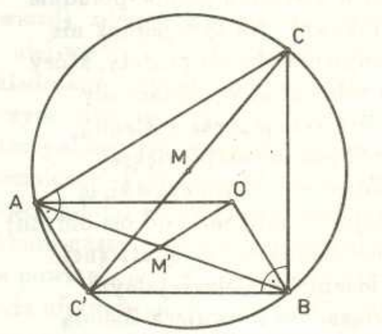
Rozwiązanie zadania M 616.
Zrzutujmy wszystkie wielokąty na oś liczbową. Obraz każdego z nich jest odcinkiem. Wszystkie te odcinki mają punkt wspólny (np. największy spośród ich lewych końców). Prosta prostopadła do osi, przechodząca przez ten punkt, ma punkty wspólne ze wszystkimi wielokątami.



Rozwiązanie zadania M 617.
Udowodnimy, że taki wielomian nie istnieje. Jeśli P ma współczynniki naturalne, wówczas, oczywiście, dla dostatecznie dużych k suma cyfr liczby $P(10^k)$ równa jest sumie sum cyfr współczynników wielomianu P, a więc $P(n)$ nie jest rozbieżny do nieskończoności. Wystarczy teraz udowodnić, że dla dowolnego wielomianu P o współczynnikach całkowitych istnieje taka liczba naturalna d, że wielomian $Q(x) = P(x+d)$ ma współczynniki naturalne. Niech

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Możemy założyć, że $a_n > 0$. Mamy

$$Q(x) = P(x+d) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} x^k d^{i-k} = \sum_{k=0}^{n} x^k \left(\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} a_i d^{i-k} \right).$$

Ale

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} a_i d^{i-k} \underset{d\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad \text{bo } a_n > 0.$$

W rozwiązaniu był błąd

Zadanie **M 600** (*Delta* 5/1991) polegało na znalezieniu figury złożonej z ortocentrów (punktów przecięcia wysokości) trójkątów ABC, gdzie A i B są ustalone, a C przebiega ustalony okrąg o przechodzący przez A i B. W rozwiązaniu podano, że figurą tą jest obraz symetryczny okręgu o względem prostej AB bez punktów A i B.

Pan **Krzysztof Zajkowski** z Moniek zwrócił nam uwagę, że rozwiązanie jest złe (napisał bardzo uprzejmie: *istnieje drobna usterka*) i dowiódł, że właściwym rozwiązaniem jest obraz okręgu o w przesunięciu o wektor $2\overrightarrow{MM'}$ (gdzie M to środek okręgu o, a M' to środek odcinka AB) bez obrazów punktów A i B w tym przesunięciu. Dlaczego można napisać, że jest to drobna usterka? Zapewne dlatego, że obraz okręgu o w symetrii względem prostej AB jest tą samą figurą, co obraz tego okręgu w przesunięciu o wektor $2\overrightarrow{MM'}$; można więc spojrzeć na to tak, że różnica polega jedynie na drobiazgu – które dwa punkty należy pominąć. Ale musimy jasno powiedzieć jeszcze raz – rozwiązanie było złe.

A oto dobre rozwiązanie pana Zajkowskiego.
Oznaczmy przez C' obraz punktu C w symetrii względem M, a przez O – obraz C' w symetrii względem M'. Wówczas $C'A \perp AC$ i $C'B \perp BC$ (bo CC' jest średnicą okręgu o) oraz $OB || C'A$ i $OA || C'B$ (bo symetria środkowa przeprowadza proste na proste do nich równoległe). Stąd O jest ortocentrum (bo $OB \perp AC$ i $OA \perp BC$). Ale w ten sposób zbiór ortocentrów to zbiór obrazów możliwych punktów C (a więc bez A i B) w złożeniu dwu symetrii środkowych – względem M i M'. Złożenie takich symetrii jest przesunięciem o wektor $2\overrightarrow{MM'}$.

Pozostaje pytanie, gdzie w rozwiązaniu zadania **M 600**, które zamieściliśmy, kryje się błąd. Otóż wykazaliśmy tam, że **każde** ortocentrum leży na obrazie symetrycznym o względem prostej AB (co jest prawdą), a nic nie powiedzieliśmy o figurze utworzonej przez **wszystkie** ortocentra.

Jeszcze gorzej wygląda sprawa uwagi *bez punktów* A i B. Oczywiście, punkty te mogą być ortocentrami pewnych spośród rozpatrywanych trójkątów: gdy AC jest średnicą, ortocentrum jest B, a gdy średnicą jest BC – ortocentrum jest A.

Bardzo dziękujemy panu Zajkowskiemu i przepraszamy wszystkich Czytelników.

Marek KORDOS

Wyniki Konkursu Prac Uczniowskich z Matematyki

Komisja Konkursu Prac Uczniowskich z Matematyki, obradując dnia 9 września 1991 roku w Katowicach w składzie: Zdzisław Pogoda – przewodniczący, Jerzy Bednarczuk, Piotr Hajłasz, Marek Kordos, Andrzej Mąkowski, Zofia Muzyczka, Agnieszka Wojciechowska, Michał Wojciechowski, biorąc pod uwagę wybór tematu, poziom pracy i przebieg obrony, postanowiła przyznać:

1. złoty medal i nagrodę w wysokości zł 700.000,- Marcinowi Kasperskiemu z IX LO im. Klementyny Hoffmanowej w Warszawie, za pracę *27 zbiorów wypukłych bez środka symetrii*,
2. srebrny medal i nagrodę w wysokości zł 700.000,- Grzegorzowi Zwarze z IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu, za pracę *Wspólne punkty stałe wielomianów komutujących*,
3. brązowy medal i nagrodę w wysokości zł 350.000,- Małgorzacie Sęk z Zespołu Szkół Zawodowych im. Edwarda Dembowskiego w Wieliczce za pracę *Łamane spiralne*,
4. wyróżnienie i nagrodę w wysokości zł 350.000,- Mikołajowi Rotkiewiczowi z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie za pracę *Wzór na n-tą liczbę pierwszą*,
5. dyplom uczestnictwa w finale Zbigniewowi Romanowskiemu z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie za pracę *Różniczkowanie ciągów i co z tego wynika...*,
6. nagrody pieniężne opiekunom prac: Krzysztofowi Chełmińskiemu i Bronisławowi Pabichowi po zł 300.000,- oraz Henrykowi Pawłowskiemu i Mirosławowi Uskiemu po zł 150.000,-.