Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 125 (WT=2,70) i 126 (WT=3,60)
z numeru 10/1991

Adam Sikorski – Lublin 39,55
Paweł Perkowski – Szczecin 38,66

Przepraszamy za błędy w punktacji w obszernym omówieniu Ligi w *Delcie* 2/1992, w wyniku których zaniżone zostały stany kont pp. Mariusza Bogacza, Romana Musiała, Wiesława Kacprzaka, Tomasza Wietechy i Przemysława Gworysa. Prawidłowe liczby punktów dla pp. Wietechy i Gworysa wydrukowane zostały w numerze 5/1992

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1992

Przypominamy treść zadań:

133. Po wewnętrznej stronie pionowego cylindra o promieniu R toczy się bez poślizgu kulka o promieniu $r < R$. Znaleźć zależność od czasu współrzędnej pionowej kulki oraz kąta obiegu w płaszczyźnie poziomej.

134. Pocisk karabinowy o masie m lecący z prędkością v trafia w drewniany klocek o masie M i grubości d. Siła oporu działająca na pocisk w drewnie nie zależy od prędkości i jest równa T. Przy jakiej wartości v klocek uzyska maksymalną prędkość, jeśli początkowo był nieruchomy? Długość pocisku i siły zewnętrzne pominąć.

133. Przyjmijmy oś z jako pionową, w płaszczyźnie zaś poziomej wprowadźmy osie nieruchome x i y oraz – podobnie jak w zadaniu 126 – osie lokalne r i u. Podane poprzednio równania (1) – (6) (zob. *Delta* 2/1992) obowiązują bez jakichkolwiek zmian i z faktu, że $\vec{P}$ ma obecnie kierunek osi z wnioskujemy, że jest to jedyna niezerowa współrzędna wszystkich składników równania (6), tzn. $T_u = ma_u = 0$. Zatem ruch obiegowy kulki w płaszczyźnie poziomej jest ruchem jednostajnym po okręgu i możemy wprowadzić stałą kątową prędkość obiegu $\Omega = \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{v_u}{R-r}$. Przekształcając jak poprzednio składową z równania (6) otrzymujemy

$$-(1+\gamma)T = \gamma P + \gamma m r \Omega \omega_r\,,$$

a podstawiając $T = m\dfrac{dv_z}{dt} - P$ mamy

$$-(1+\gamma)m\frac{dv_z}{dt} + P = \gamma m r \Omega \omega_r\,.$$

Po zróżniczkowaniu tego równania jeszcze raz względem czasu i skorzystaniu z poprzednio wyprowadzonego równania (12)

$$r d\omega_r = v_z d\alpha, \quad \text{tzn.} \quad r\frac{d\omega_r}{dt} = v_z \Omega,$$

otrzymujemy ostatecznie równanie oscylatora harmonicznego

$$-(1+\gamma)\frac{d^2 v_z}{dt^2} = \gamma \Omega^2 v_z\,.$$

Oznacza to, że zależność pionowych składowych prędkości i położenia od czasu ma charakter oscylacyjny, z częstością równą $\Omega\sqrt{\gamma/(1+\gamma)}$. Kulka nie spada więc w dół, wbrew wszelkim oczekiwaniom! Siła ciężkości dodaje tylko składową stałą do również oscylującej prędkości kątowej ω_r. Tak się dzieje, ma się rozumieć, tylko w przypadku braku oporów ruchu, niemniej jednak, być może, znaleźliśmy odpowiedź na pytanie trapiące bilardzistów: Dlaczego tak często bila, która wpadła do otworu, wyskakuje z niego z powrotem?

134. Maksymalną prędkość klocek uzyska wtedy, gdy pocisk ugrzęźnie w nim na samym końcu („na granicy przebicia"), gdyż zarówno przy przebiciu na wylot, jak i przy wcześniejszym ugrzęźnięciu czas działania siły tarcia będzie krótszy. Badając ruch **względny** pocisku i klocka po uderzeniu stwierdzamy, że jest to ruch jednostajnie opóźniony z prędkością początkową v, końcową równą zeru i przyspieszeniem równym sumie bezwzględnych wartości przyspieszeń obu ciał:

$$a = a_1 + a_2 = \frac{T}{m} + \frac{T}{M}\,.$$

Droga w ruchu względnym jest równa grubości d klocka. Podstawiając te wielkości do wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym

$$s = \frac{1}{2a}\left(v_{konc}^2 - v_{pocz}^2\right)$$

znajdujemy prędkość v pocisku

$$v = \sqrt{2dT\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)}\,.$$

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1992

Przypominamy treść zadań:

235. Okręgi k i k' są styczne zewnętrznie. W okrąg k wpisano trójkąt równoboczny ABC. Na okręgu k' tak obrano punkty A', B', C', że proste AA', BB', CC' są styczne do k'. Dowieść, że długość jednego z odcinków AA', BB', CC' równa się sumie długości pozostałych dwóch.

236. Dla każdej liczby naturalnej n wyznaczyć wszystkie funkcje $f: M \to M$, $M = \{0, 1, \ldots, n\}$, spełniające warunek: $f(m) = |f^{-1}(\{m\})|$ dla $m \in M$. ($|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru X.)

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 225 (WT=1,89) i 226 (WT=2,52) z numeru 9/1991

Paweł Kubit	– Krosno	47,58
Tomasz Wietecha	– Tarnów	46,39
Jan Ciach	– Ostrowiec Św.	44,31
Leszek Krawczyk	– Włodawa	36,37
Mirosław Matlęga	– Skoczów	35,79

Urodzajna kolejka! W matematycznym **Klubie 44** – dwie nowe twarze: panowie Kubit i Wietecha. Pan Ciach zaś, kończąc trzecie okrążenie, staje się jedenastym Weteranem.

235. Oznaczmy środki i promienie okręgów k i k' odpowiednio przez O, O', r, r', a punkt styczności tych okręgów przez T. Przedłużmy odcinek AT do przecięcia z okręgiem k' w punkcie D. Trójkąty równoramienne AOT i $TO'D$ są podobne w skali $r : r'$, więc $|AD| : |AT| = (|AT| + |TD|) : |AT| = \lambda$, gdzie $\lambda = (r + r')/r$. Stąd

$$|AA'| = \sqrt{|AT| \cdot |AD|} = \sqrt{\lambda}\,|AT|$$

i podobnie $|BB'| = \sqrt{\lambda}\,|BT|$, $|CC'| = \sqrt{\lambda}\,|CT|$.

Przyjmijmy, że punkt T leży na krótszym łuku AB okręgu k. Na mocy twierdzenia Ptolemeusza zachodzi równość

$$|AT| \cdot |BC| + |BT| \cdot |CA| = |CT| \cdot |AB|.$$

Skoro ABC jest trójkątem równobocznym, wnosimy stąd, że

$$|AA'| + |BB'| - |CC'| = \sqrt{\lambda}\left(|AT| + |BT| - |CT|\right) = 0.$$

236. Załóżmy, że f spełnia podany warunek. Wówczas

$$(1) \qquad \sum_{m=0}^{n} f(m) = \left|\bigcup_{m=0}^{n} f^{-1}(\{m\})\right| = |M| = n+1.$$

Wśród składników tej sumy mamy $f(1)$ jedynek, $f(2)$ dwójek itd. Zatem

$$(2) \qquad \sum_{m=1}^{n} m f(m) = n+1.$$

Niech $f(0) = k$. Oczywiście, $k \geq 1$, $f(k) \geq 1$. Odejmując (1) od (2) otrzymujemy

$$(3) \qquad \sum_{m=1}^{n} (m-1) f(m) = k.$$

Gdyby dla pewnego $r \geq 3$, $r \neq k$, zachodziła nierówność $f(r) \geq 1$, to na mocy (3) dostalibyśmy

$$k \geq (k-1)f(k) + (r-1)f(r) \geq (k-1) + (r-1) \geq k+1$$

– sprzeczność. Wynika stąd, że jedynymi niezerowymi wartościami funkcji f mogą być liczby $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(k)$. Zauważmy jeszcze, że jeśli $k \geq 3$, to nierówność $k \geq (k-1)f(k)$ (wynikająca z (3)) pociąga $f(k) = 1$.

Przepiszmy teraz równość (1), rozróżniając trzy przypadki: $k = 1$, $k = 2$, $k \geq 3$, i rozpisując w każdym z tych przypadków lewą stronę (1) w bardziej przejrzystej postaci:

$$\begin{array}{ll}
\text{gdy } k=1: & 1 + f(1) + f(2) + 0 + \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots + 0 = n+1, \\
\text{gdy } k=2: & 2 + f(1) + f(2) + 0 + \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots + 0 = n+1, \\
\text{gdy } k \geq 3: & k + f(1) + f(2) + 0 + \ldots + 0 + 1 + 0 + \ldots + 0 = n+1
\end{array}$$

(jedynka w ostatnim wzorze na k-tym miejscu). Stąd, w myśl własności funkcji f:

$$\begin{array}{llll}
\text{gdy } k=1: & f(1)=2, & f(2)=1; & n=3; \\
\text{gdy } k=2: & f(1)=0, & f(2)=2; & n=3 \ \text{ lub} \\
 & f(1)=1, & f(2)=2; & n=4; \\
\text{gdy } k \geq 3: & f(1)=2, & f(2)=1; & n=k+3 \geq 6.
\end{array}$$

Możemy więc wypisać (w formie tabelek) wszystkie funkcje spełniające podany warunek:

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ f: & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ f: & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ f: & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccccccccc} & 0 & 1 & 2 & \ldots & \ldots & \ldots & k & k+1 & k+2 & k+3 & (=n \geq 6) \\ f: & k & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$