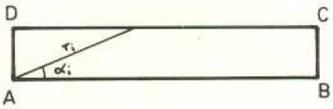
epsilon
11/92
(21)

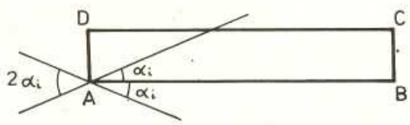
Pokrywamy płaszczyznę prostokątami

Jeśli mamy daną rodzinę kwadratów o nieskończonej sumie pól, to można nimi pokryć płaszczyznę – wykazaliśmy to w poprzednim numerze *EPSILONA*. Jeśli jednak zamiast kwadratów będziemy rozważać prostokąty, już tak być nie musi! Oto kontrprzykład, skonstruowany przez A. Bachszecjana.

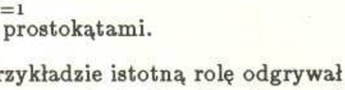
Ustalmy $\alpha_i = r_i = 1/2^i$ i skonstruujmy prostokąt o numerze i tak, jak na rysunku; długości AB i CD są takie, by $AB \cdot BC = 1$.



Przypuśćmy, że prostokątami takimi da się pokryć płaszczyznę. Wówczas każdy prostokąt określa przedstawione na rysunku kąty:



Zaczepmy wszystkie te kąty (przesuwając je równolegle) w jednym punkcie płaszczyzny. Suma kątów wynosi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 4\alpha_i = 4\sum\limits_{i=1}^{\infty} 1/2^i = 4 < 2\pi$. Istnieje zatem półprosta nie zawierająca się w żadnym z tych kątów; przez δ_i oznaczmy długość przecięcia tej półprostej z i-tym prostokątem, a kąt β_i określmy tak, jak na poniższym rysunku.

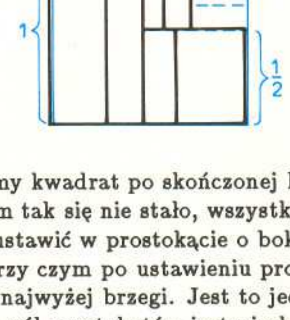


Z konstrukcji otrzymujemy, że $\beta_i \geq \alpha_i$, zatem $\delta_i \leq r_i$ i $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta_i \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} r_i = 1$, czyli półprosta nie może być pokryta badanymi prostokątami.

W kontrprzykładzie istotną rolę odgrywał fakt, że prostokąty mogły być bardzo długie. Co więc będzie, gdy przyjmiemy dodatkowo, że boki prostokątów są wspólnie ograniczone, czyli że wszystkie mają długość nie większą od pewnej stałej M?

Przy tym założeniu będziemy w stanie płaszczyznę pokryć! Oto idea uzasadnienia. Możemy założyć, że $M \geq 1$; mamy zatem $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i = \infty$, $a_i \leq M$, $b_i \leq M$, gdzie a_i i b_i są długościami boków odpowiednich prostokątów. Ponieważ dla liczby a_i istnieje takie k_i całkowite (niekoniecznie dodatnie), że $1/2^{k_i} \leq a_i \leq 1/2^{k_i - 1}$, wystarczy rozpatrywać prostokąty o bokach długości $1/2^{k_i}$ oraz b_i (suma ich pól też, oczywiście, wynosi nieskończoność, bo $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i/2^{k_i} \geq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_i b_i$). Jeżeli wykażemy, że skończoną liczbą takich prostokątów da się pokryć kwadrat o boku 1, to – na mocy prawdziwości twierdzenia dla pokrycia kwadratami – rozwiążemy zadanie.

Jeśli istnieją takie prostokąty, że $1/2^{k_i} \geq 1$, to zaczepiamy pierwszy z nich w lewym dolnym rogu kwadratu, następny stawiamy obok poprzedniego – i tak dalej. Jeśli prostokątów takich nie wystarcza do pokrycia kwadratu (lub nie ma ich wcale), to dzielimy to, co zostało (lub cały kwadrat), na dwie części o wysokości $\frac{1}{2}$. Pokrywamy pozostały obszar prostokątami o wysokości $\frac{1}{2}$ według poprzedniego schematu dalej – najpierw dół, potem górę – a po ewentualnym wyczerpaniu prostokątów przed pokryciem kwadratu dzielimy powierzchnię nie pokrytą na części o wysokościach $\frac{1}{4}$...



W ten sposób pokryjemy kwadrat po skończonej liczbie kroków. Gdyby bowiem tak się nie stało, wszystkie nasze prostokąty dałoby się ustawić w prostokącie o bokach długości M i $1+M$, przy czym po ustawieniu prostokąty te miałyby wspólne co najwyżej brzegi. Jest to jednak niemożliwe, gdyż suma pól prostokątów jest nieskończona – i tym samym zakończyliśmy dowód.

A co będzie, gdy rozważymy trójkąty lub jeszcze inne figury?

Armen EDIGARIAN

Stefan Banach uzyskał doktorat na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie w 1920 roku. Zmarły trzy lata temu krakowski matematyk, ksiądz profesor Andrzej Turowicz, przed wojną wykładający na Politechnice Lwowskiej, opowiadał, że Banach na uwagi, iż powinien już zostać doktorem, długo odpowiadał, że ma na to jeszcze czas i że może wymyślić coś ciekawszego, niż dotychczas uzyskane przez niego wyniki. Po pewnym czasie jednak władze akademickie straciły cierpliwość; ktoś spisał najnowsze rezultaty Banacha, co zostało uznane za znakomitą pracę doktorską. Przepisy jednak wymagały również egzaminu. Pewnego dnia zaczepiono Banacha na korytarzu uniwersytetu: „jacyś ludzie do nas przyjechali i mają parę matematycznych pytań, na które pan na pewno będzie umiał odpowiedzieć; czy mógłby pan pójść do dziekanatu i im pomóc?". Banach zrobił to bardzo chętnie, nie zdając sobie sprawy, że właśnie zdaje egzamin doktorski przed specjalnie przybyłą w tym celu z Warszawy komisją. Obecnie obowiązujące w Polsce ustawodawstwo chyba takiej możliwości nie dopuszcza...

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.