było już żadnych problemów – mógł przebywać jak długo chciał. Pracowaliśmy razem. Landau był jeszcze bardzo młodym, ale już bardzo sumiennym fizykiem. Kiedy pojawiała się jakaś praca, która go interesowała, nie czytał jej, lecz od razu sam przeprowadzał rachunki. I jeśli zgadzały się one z tym, co tam napisano, uważał pracę za dobrą. Lubił wszystko systematyzować. Na przykład, podzielił fizyków na kilka klas: do pierwszej weszli Bohr, Sommerfeld; Einstein był w specjalnej klasie, sam jeden. Siebie Landau skromnie umieścił w drugiej klasie. W taki „systematyczny" sposób odnosił się również i do innych spraw.

Landau bardzo nie lubił brody, mówił, że to przeżytek czasów wiktoriańskich, zwłaszcza u młodych ludzi. Był wśród nas fizyk, który nie nosił brody, lecz miał bardzo długie bokobrody. Landau również i to uważał za burżuazyjne i zadzwoniwszy do jego żony spytał: „Kiedy Pani przekona męża, by zgolił te śmieszne bokobrody?". Utrzymywał, że na Zachodzie, w Zurychu, jest więcej brodaczy niż w Rosji, w Leningradzie. Założyliśmy się i policzyliśmy, ilu brodaczy spotkaliśmy na ulicy. Potem, kiedy przyjechałem do Leningradu, przeprowadziliśmy podobne obliczenia i stwierdziliśmy, że w Leningradzie było więcej brodaczy. Wygrałem zakład, a Landau próbował tłumaczyć to tym, że trwała kolektywizacja i wielu chłopów przenosiło się do miasta.

Landau był przekonany, że tylko młodzi teoretycy mogą dokonać wartościowych odkryć. Co prawda, zmienił później zdanie. Kiedyś w rozmowie padło nazwisko pewnego teoretyka, o którym Landau nie słyszał. Dowiedziawszy się, że ma on 27 lat, powiedział: „Taki młody, a już taki nieznany!".

Oprócz Landaua byli w Zurychu również i inni, wśród nich George Gamow. Gamow był już wtedy wybitnym fizykiem, ale miał też ogromne poczucie humoru i uwielbiał wszelkie dowcipy. Kiedyś poszliśmy w góry i trafiliśmy na szczyt o dość interesującej nazwie. Tam Gamow wyciągnął z kieszeni kartkę papieru – był to list do *Nature* o jakiejś reakcji jądrowej, którego jeszcze nie dokończył. Gamow usiadł na wierzchołku góry i kończył swój list. Napisawszy ostatnie linijki, umieścił pod nimi nazwę szczytu, gdzie były one napisane i złożył podziękowania towarzyszom wyprawy za stworzenie możliwości popracowania tamże.

... W owych czasach, zupełnie tak jak teraz, fizycy lubili podróżować, jeździć na

Twierdzenie Liouville'a

Władysław NARKIEWICZ

1. Wiele rezultatów teorii liczb uzyskuje się metodami elementarnymi, bez używania środków tzw. wyższej matematyki. Są jednakże działy tej teorii, w których użycie metod analitycznych lub algebraicznych znacznie upraszcza rozumowanie, a czasem pozwala na uzyskanie wyników niedostępnych dla metod elementarnych. Przykładem takiego wyniku jest twierdzenie G. Faltingsa, które pokazuje m.in., że przy ustalonym wykładniku n równanie Fermata $x^n + y^n = z^n$ może mieć jedynie skończenie wiele rozwiązań x, y, z nie mających wspólnego dzielnika większego od 1.

Czasem zupełnie proste fakty analityczne prowadzą do ciekawych wyników. Podamy tutaj zastosowanie jednego z najprostszych twierdzeń analizy.

Twierdzenie o wartości średniej J.L. Lagrange'a. *Jeśli $f(x)$ jest funkcją określoną w pewnym przedziale i mającą tam ciągłą pochodną $f'(x)$, to dla każdej pary A, B różnych liczb tego przedziału istnieje taki punkt c leżący między A i B, że zachodzi równość*

$$\frac{f(B)-f(A)}{B-A} = f'(c).$$

2. Skorzystamy z tego twierdzenia przy dowodzie twierdzenia J. Liouville'a dotyczącego przybliżania liczb algebraicznych przez liczby wymierne. Rozpoczniemy od definicji liczby algebraicznej: liczba a nazywa się *liczbą algebraiczną*, jeśli istnieje niezerowy wielomian o współczynnikach całkowitych, którego jednym z pierwiastków jest liczba a. Najmniejszy ze stopni takich wielomianów nazywamy *stopniem* liczby a.

I tak, na przykład, każda liczba wymierna jest liczbą algebraiczną stopnia 1, liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $(1+\sqrt{5})/2$ są liczbami algebraicznymi stopnia 2, a liczba $\sqrt[n]{2}$ jest liczbą algebraiczną stopnia n.

Każda liczba rzeczywista da się przybliżyć z dowolną dokładnością przez liczby wymierne. Jest jasne, że chcąc uzyskać dobre przybliżenia danej liczby niewymiernej należy używać liczb wymiernych o coraz większych mianownikach. W przypadku liczb algebraicznych to banalne spostrzeżenie można sformułować w sposób bardziej konkretny.

Twierdzenie Liouville'a. *Jeśli a jest niewymierną rzeczywistą liczbą algebraiczną stopnia n, to istnieje taka stała $C(a) > 0$ zależna jedynie od liczby a, że dla dowolnych liczb całkowitych p, q zachodzi nierówność:*

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| > \frac{C(a)}{q^n}.$$

Dowód. Oznaczmy przez

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0$$

wielomian stopnia n o współczynnikach całkowitych, którego pierwiastkiem jest a. Zauważmy, że pochodna $f'(X)$ nie może znikać w punkcie a, gdyż jest ona wielomianem stopnia mniejszego od n. Wynika stąd, że w pewnym przedziale $I = [a-d, a+d]$, zawierającym a, pochodna ta jest różna od zera, a ponadto jej wartość bezwzględna jest tam ograniczona przez, powiedzmy, liczbę M. Zatem dla $x \in I$ mamy

$$0 < |f'(x)| < M .$$

Zauważmy, że a jest jedynym pierwiastkiem wielomianu $f(X)$ w przedziale I, gdyż gdyby b był innym jego pierwiastkiem, to stosując twierdzenie o wartości średniej do liczb a i b otrzymalibyśmy punkt $c \in I$ spełniający $f'(c) = 0$.

Niech teraz $r = p/q$ (p, q – całkowite) będzie liczbą wymierną. Rozpatrzymy dwa przypadki, w zależności od tego, czy r leży w I, czy też nie. Jeśli $r \in I$, to stosując twierdzenie o wartości średniej do wielomianu $f(X)$ oraz punktów $A = r$, $B = a$ otrzymamy, korzystając z tego, że $f(a) = 0$, równość

$$f(r) = f'(c)(r - a),$$

przy czym c leży między a i r, więc należy do przedziału I. Zatem

$$|r - a| = \left|\frac{f(r)}{f'(c)}\right| > \frac{|f(r)|}{M}.$$

Ponieważ

$$f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_0 q^n}{q^n},$$

a licznik tego ułamka jest niezerową liczbą całkowitą, zatem otrzymujemy $|f(r)| \geq 1/q^n$, a więc

$$|r - a| > \frac{1}{Mq^n}.$$

Jeśli zaś $r \notin I$, to

$$|r - a| > d \geq \frac{d}{q^n}.$$

Przyjmując teraz za $C(a)$ mniejszą z liczb d i $1/M$ otrzymujemy tezę twierdzenia. ■

Podany dowód pozwala jawnie wyznaczyć wielkość $C(a)$. I tak, na przykład, bez trudu otrzymujemy, że w przypadku $a = \sqrt{2}$ możemy przyjąć $d = 0{,}1$, $M = 3$, a więc $C = 0{,}1$ i widzimy, że jeśli liczba p/q jest przybliżeniem wymiernym $\sqrt{2}$, to

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{10q^2}.$$

3. Liczby, które nie są algebraiczne, nazywają się *liczbami przestępnymi*. Takimi liczbami są, na przykład, liczby $2^{\sqrt{3}}$, π czy też liczba e, zdefiniowana jako suma szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

ale dowód tych faktów nie jest łatwy. Sprawdzenie, czy konkretna liczba jest algebraiczna czy przestępna, jest na ogół bardzo trudne. I tak, na przykład, nie wiadomo, czy liczba $e + \pi$ jest przestępna. Twierdzenie Liouville'a pozwala na prostą konstrukcję liczb przestępnych. Sam Liouville zauważył, że suma S szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$$

jest liczbą przestępną. (Był to pierwszy przykład takiej liczby.) Oto jego rozumowanie.

Przypuśćmy, że S jest liczbą algebraiczną i oznaczmy przez n jej stopień. Suma częściowa

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{i!}}$$

konferencje, sesje. Co prawda, przejazdy nie były wtedy finansowane, dlatego jakże często trzeba było siedzieć całą noc w kącie wagonu kolejowego trzeciej klasy. Ale kiedy otrzymałem zaproszenie na zjazd Towarzystwa Fizycznego w Odessie, to wtedy, przynajmniej w granicach ZSRR, jeździłem w komfortowych warunkach jako gość. Zaprosił mnie tam Jakow Iljicz Frenkel, który przeczytał moje prace.

Jednym z ulubionych miejsc, do których się jeździło, była Kopenhaga, gdzie pracował Niels Bohr. Był to nadzwyczajny człowiek. Bohr nie chciał obrażać ludzi, ale jednocześnie nie mógł pozwolić, by mówiono cokolwiek, co przeczyłoby prawdzie. I z tych dwu cech otrzymywało się osobliwe połączenie. Oto pewnego razu Bohr powiedział: „Nie mówię tego, by krytykować, ale to zupełne bzdury". Innym razem powiedział jeszcze, że jasność i prawda to dopełniające się pojęcia i rzeczywiście w swoich pracach najbardziej zbliżył się do skraju prawdy.

Proces pisania prac u Bohra był dość skomplikowany. Zaczynał się od tego, że Bohr dyktował, a ktoś z gości był zobowiązany wszystko zapisywać. Potem zaczynało się poprawianie, zmieniano zwroty, tak by wszystko, co napisano, było bezwarunkowo prawdziwe. Zmian było sporo, strony przepisywano wpierw ręcznie, potem na maszynie, po czym znów następowało poprawianie, itd. W końcu pracę wysyłano do publikacji w piśmie Duńskiej Akademii Nauk, gdzie prace Bohra, z oczywistych względów, były bardzo cenione. Po czym znów zaczynała się praca nad korektami, których liczba niekiedy dochodziła do szesnastu.

Naturalnie, Bohr miał taki stosunek nie tylko do słów. Kiedyś przyszedł obejrzeć nowy budynek, budowany dla instytutu. Mistrz, który go świetnie znał, mówi: „Profesorze Bohr, widzi Pan tę ścianę? Jeśli chce Pan ją znowu przesunąć, to niech się Pan szybko decyduje, bo za trzy godziny beton zastygnie".

Bohr, jak należało się tego spodziewać po profesorze, był dość roztargniony. Pamiętam, że w czasie dyskusji przez cały czas palił cygara. Pali – i nagle pyta, czy ktoś ma zapałki. Dają mu zapałki. Usiłuje zapalić cygaro nie przerywając rozmowy, co jest dość trudne. Potem chował zapałki do kieszeni, a po pięciu minutach znowu zadawał to samo pytanie i wszystko zaczynało się od początku. Długo przechowywałem okopcony kawałek kredy: on w jakiś sobie tylko właściwy sposób trzymał cygaro i kredę w jednej ręce.

W tym czasie zaczęły się nieprzyjemności w Niemczech i w Kopenhadze dyskutowano nie tylko o fizyce, ale i o tym, jak znaleźć pracę dla uczonych z Niemiec i Austrii. Dla uczonych w ogóle był to czas niełatwy. Trwał kryzys ekonomiczny, uniwersytety nie powiększały się i miejsce zwalniało się, gdy ktoś odchodził na emeryturę albo umierał. Rozprawa doktorska zupełnie nie zapewniała miejsca pracy w badaniach naukowych. Byłem wtedy przez rok stypendystą fundacji Rockefellera i mogłem, wyjeżdżając z Zurychu, połowę czasu spędzić w Rzymie, a drugą połowę w Cambridge. Przede mną uczynił tak Hans Bethe, który zimę spędził w Cambridge, a lato w Rzymie. Postąpiłem na odwrót i do dzisiaj uważam, że znalazłem lepsze rozwiązanie.

W Rzymie miałem okazję spotkać się z Enrico Fermim, który również był wybitnym fizykiem. Pytany o jakiś problem prawie zawsze zdejmował z półki książkę, gdzie problem ten był już rozwiązany. Przeważnie były to proste sprawy – Fermi nie lubił skomplikowanych zadań. Ale tu powstaje pytanie: co nazywać prostymi zadaniami? Czy nie stawały się one proste dopiero wtedy, gdy Fermi je rozwiązał?

Największe wrażenie zrobił na mnie Fermi później, już w Los Alamos, w czasie prac nad bombą atomową. Wszyscy, naturalnie, chcieli wiedzieć, jaka jest moc bomby. Aby ją wyznaczyć, mieliśmy mnóstwo aparatury, ale potrzebny był również i pewien czas. A Fermi przygotował małe kawałeczki papieru i, kiedy dotarła do nas fala uderzeniowa, wypuścił te kawałki. Z odległości, na jaką poleciały, potrafił dość szybko wyznaczyć moc wybuchu. Nie wiem, co wtedy bardziej mnie zdumiało: idea metody czy to, że dokładnie określił moment, kiedy trzeba było puścić papierki. Jestem pewien, że na jego miejscu albo wypuściłbym je zbyt wcześnie, albo w ogóle zapomniałbym je wypuścić.

Po Rzymie, jak już powiedziałem, pojechaliśmy z żoną do Cambridge, gdzie najbardziej interesujący był kontakt z Paulem Dirakiem. Dirac był bardzo uprzejmy i odniósł się do nas z wyjątkową gościnnością. Nie mieliśmy samochodu i on, wiedząc o tym, woził nas swoim, z którego był bardzo dumny. Żartowano, że Dirac-kierowca ma szczególną cechę: prędkość jego samochodu przyjmowała tylko dwie wartości – zerową i maksymalną.

Dirac zawsze dziwił swoimi osobliwymi reakcjami. Jednakże jeśli potem się je

jest liczbą wymierną, którą można zapisać w postaci $S_k = a_k/2^{k!}$, przy czym a_k jest dodatnią liczbą całkowitą. Mamy przy tym

$$|S - S_k| = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i!}} \le \frac{1}{2^{(k+1)!}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right),$$

a zatem

(1) $$|S - S_k| \le \frac{2}{2^{(k+1)!}}.$$

Korzystając z twierdzenia Liouville'a otrzymujemy natomiast

(2) $$|S - S_k| \ge \frac{C}{2^{nk!}},$$

gdzie C jest pewną stałą dodatnią i z porównania wzorów (1) i (2) wynika nierówność

$$\frac{2}{2^{(k+1)!}} \ge \frac{C}{2^{nk!}},$$

prowadząca do

$$2^{k!(k+1-n)} \le \frac{2}{C},$$

która dla dostatecznie dużych k jest fałszywa, gdyż jej lewa strona dąży do nieskończoności przy wzroście k. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że liczba S jest przestępna.

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 655. Niech n będzie liczbą naturalną, d zaś – dzielnikiem liczby $2n^2$. Udowodnić, że $n^2 + d$ nie może być kwadratem liczby naturalnej.
Rozwiązanie na str. 10

M 656. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych T_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ zachodzi nierówność

$$\sum_{j,k=1}^{n} \cos(T_k - T_j) \ge 0.$$

Rozwiązanie na str. 16

M 657. Pewien profesor matematyki napisał na tablicy wielomian $f(x)$ o współczynnikach całkowitych i powiedział: „Jeśli do f podstawimy w miejsce x wiek mojego syna, który właśnie skończył a lat, to otrzymamy równość $f(a) = a$. Ponadto $f(0) = p$ jest liczbą pierwszą większą od a". Ile lat ma syn profesora?
Rozwiązanie na str. 12

Redaguje Jarosław KULPA

F 349. Stalową igłę można położyć na powierzchni wody w taki sposób, aby nie tonęła. Obliczyć maksymalną średnicę igły, dla której możliwy jest jeszcze ten efekt. Napięcie powierzchniowe wody wynosi $\sigma = 0{,}072$ N/m, gęstość stali $\rho = 7900$ kg/m^3, gęstość wody $\rho_w = 1000$ kg/m^3.
Rozwiązanie na str. 10

F 350. Ocenić szerokość dysku planetarnego, z którego mógł powstać układ Ziemia–Księżyc. Założyć, że rzut własnego momentu pędu układu Ziemia–Księżyc na oś prostopadłą do płaszczyzny ekliptyki nie zmienił się w czasie istnienia układu. Masa Ziemi $M = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, promień Ziemi $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, masa Księżyca $m = 7{,}4 \cdot 10^{22}$ kg, średnia odległość Ziemia–Księżyc $r = 384$ tys. km, nachylenie osi ziemskiej do płaszczyzny ekliptyki $\phi_Z = 23°$, nachylenie orbity Księżyca do płaszczyzny ekliptyki $\phi_K = 5°$.
Rozwiązanie na str. 11