Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+3$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1992 upływa 28 lutego 1993). W numerze $n+4$ podane są szkicowe rozwiązania.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest ocenione w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. **4**), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. **10**, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44**.

14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44**.

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka (kilkadziesiąt nazwisk).

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możność zmian regulaminu.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 1993

Zadania z matematyki nr 255, 256

Redaguje Marcin E. KUCZMA

255. Czworokąt wypukły o bokach długości a, b, c, d jest wpisany w koło i opisany na kole. Promień koła opisanego ma długość R. Pole czworokąta równa się S. Dowieść, że

$$\frac{S}{a}+\frac{S}{b}+\frac{S}{c}+\frac{S}{d} \le 2\sqrt{S}+\frac{4R^2}{\sqrt{S}}.$$

256. Dane są liczby całkowite $n \ge k \ge 1$. Ile jest k-elementowych ciągów liczb całkowitych dodatnich $(x_1,\ldots,x_k)$ spełniających równanie $x_1+\ldots+x_k=n$? (Ciągi o tych samych wyrazach, ale występujących w różnej kolejności, uważamy za różne.)

Zadanie **256** zaproponowała pani Ilona Królak z Nysy, uczennica liceum.

Rozwiązania zadań z numeru 10/1992

Przypominamy treść zadań:

247. Dla liczb dodatnich a, b, c przyjmijmy $A=(a+b+c)/3$, $G=(abc)^{1/3}$, $H=3/(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})$. Udowodnić, że $3A^2+G^2 \ge 4G^3H^{-1}$.

248. Wyznaczyć wszystkie pary różnych liczb naturalnych x, y spełniające warunek $\mathrm{NWW}(x,y)=xy/(\max\{x,y\}-\min\{x,y\})$.

247. Przyjmijmy, że c jest najmniejszą z liczb a, b, c. Zachodzi więc nierówność $a+b-c \ge 2\sqrt{ab}-c \ge 0$, z której wynika, że

$$\begin{aligned}0 &\le (a+b-c)^2-(2\sqrt{ab}-c)^2=\\ &=(a+b+c)^2-4(bc+ca+ab)+4c\sqrt{ab}-c^2=\\ &=(3A)^2-4\cdot 3G^3H^{-1}+4c\sqrt{ab}-c^2.\end{aligned}$$

Skorzystamy teraz z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną czwórki liczb: c^2 oraz trzykrotnie wziętej liczby G^2:

$$c^2+3G^2 \ge 4(c^2G^6)^{1/4}=4c\sqrt{ab}.$$

Wracamy do poprzedniego szacowania:

$$0 \le 9A^2-12G^3H^{-1}+4c\sqrt{ab}-c^2 \le 9A^2-12G^3H^{-1}+3G^2$$

– a to jest teza zadania.

248. Przypuśćmy, że liczby naturalne x, y $(x>y)$ spełniają podany warunek i oznaczmy $\mathrm{NWD}(x,y)$ przez d. Ponieważ $\mathrm{NWD}(x,y)\cdot\mathrm{NWW}(x,y)=xy$, z równania $\mathrm{NWW}(x,y)=xy/(x-y)$ wynika, że $x-y=d$. Stąd $y=kd$, $x=(k+1)d$. Uwzględniając drugą możliwość $(x<y)$ otrzymujemy jako ogólne rozwiązanie wszystkie pary postaci $\big(kd,(k+1)d\big)$ oraz $\big((k+1)d,kd\big)$; $k,d=1,2,3,\ldots$

Przed kilkoma miesiącami pożegnaliśmy naszego Kolegę **Krzysztofa Trautmana**. Zmarł tragicznie podczas pobytu naukowego w Stanach Zjednoczonych. Przypomnijmy: Krzysztof był jednym z pierwszych członków matematycznego **Klubu 44**. Pierwsze rozwiązania przysłał jesienią 1981 roku i po kilkunastu miesiącach, będąc jeszcze uczniem liceum, zgromadził czterdzieści cztery punkty. Jeszcze przez jakiś czas przysyłał rozwiązania, zawsze eleganckie i dopracowane. Jedno z zadań ligowych było autorstwa Krzysztofa. Studia matematyczne, praca na uczelni, aktywność naukowa – i nieoczekiwany kres.

Matematyczna liga zadaniowa **Klub 44** trwa już lat jedenaście i pół. Większość uczestników to uczniowie i studenci. Po okresie aktywnego uczestnictwa w zabawie (tak to nazywajmy i traktujmy) zmniejszają intensywność udziału, po czym znikają z naszego pola widzenia. To normalne: zmieniają się obowiązki, cele, wartości; przychodzi czas na poważniejszą działalność. Czasem, po latach przerwy, ktoś znów przyśle rozwiązanie jakiegoś zadania, które mu szczególnie przypadło do gustu. To znaczy, że nie rozstał się z nami na dobre, że nadal jest naszym wiernym czytelnikiem. Bardzo miłe są dla nas takie sygnały pamięci.

Wśród osób, które w „bieżącym okresie sprawozdawczym" (rok szkolny 1991/92) uczestniczyły w lidze, ogromna większość zaczynała karierę ligową dwa–trzy lata wcześniej. Ale są i długodystansowcy. Rekord nie do pobicia dzierży pan **Jerzy Janowicz** (nauczyciel szkoły podstawowej), który wystartował w lidze w pierwszym miesiącu jej istnienia; można na palcach policzyć te miesiące, w których nie otrzymaliśmy od niego korespondencji: rozwiązań oraz propozycji zadań, zawsze pomysłowych.

Spośród uczestników pierwszej lub drugiej kolejki ligowej (jesień 1981), jeszcze trzech wytrwało do tej pory (1991/92), chociaż z okresami odpoczynku: **Kazimierz Serbin**, **Mirosław Matlęga**, **Marek Prauza**. Nietrudno zresztą wymienić *wszystkich*, którzy wystartowali przed rokiem 1986 i nadal aktywnie uczestniczą – z przerwami niewielkimi: **Krzysztof Jedziniak** (82), **Tadeusz Józefczyk** (83), **Jan Ciach** (83) (Panie Janie! Erudycji w dziedzinie klasycznej geometrii możemy Panu tylko pozazdrościć) – lub z przerwami znaczniejszymi: **Józef Siwy**(82), **Krystyna Witek**(83), **Krzysztof Zapisek**(83); w nawiasie rok startu.

Na zakończenie zwróćmy uwagę na mały jubileusz, czy może raczej „ćwiartkę jubileuszu": jedenaście lat naszej ligi; pełny jubileusz będziemy świętować, gdy liga skończy 44 lata.

Teraz, jak co roku, omówimy ciekawsze rozwiązania zadań oraz uogólnienia i komentarze uczestników. Jeśli jakieś trudne zadanie zostało zrobione przez nie więcej niż sześć osób, podajemy ich nazwiska.

Lista uczestników
ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 241 (WT=1,28) i 242 (WT=1,71)
z numeru 5/1992

Mikołaj Rotkiewicz	–	42,90
Krzysztof Zawisławski	– 1 –	42,82
Marek Prauza	– 2 –	42,43
Józef Siwy	– 1 –	42,42
Piotr Kumor	– 2 –	39,98
Mirosław Matlęga	–	38,46
Marcin Kasperski	–	38,26
Przemysław Gadziński	– 1 –	36,49
Leszek Krawczyk	–	36,37
Jerzy Janowicz	– 7 –	35,80
Leszek Gasiński	–	35,52
Andrzej Bonk	– 3 –	33,92
Jerzy Mikuta	– 2 –	33,87
Anna Gluza	– 1 –	32,96
Leszek Krzywonos	–	32,51
Krystyna Witek	– 1 –	32,00
Krzysztof Jedziniak	– 2 –	31,81
Łukasz Wiechecki	–	31,48
Marek Karaś	–	30,10
Adam Czornik	– 1 –	29,56
Tomasz Wietecha	– 1 –	28,33
Ryszard Pagacz	– 2 –	27,16
Tadeusz Józefczyk	– 2 –	27,15
Andrzej Kondracki	–	26,60
Krzysztof Zapisek	–	24,68
Tomasz Szymczyk	– 1 –	23,06

Legenda (przykładowo): stan konta 7-35,80 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył **44** punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 35,80 punktów.

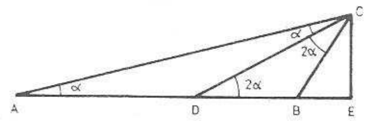
Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1990, 1991 lub 1992.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście, jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani **Klubu 44M** (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): J.Janowicz(7), P.Kamiński(5), M.Gałecki(5), J.Uryga(4), A.Pawłowski(4), D.Sowizdrzał, T.Rawlik, M.Mazur, A.Bonk, K.Serbin, J.Ciach (jeśli uczestnik przekroczył barierę **44** punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie **Klubu 44M** (alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk figurujących na liście powyżej):
„dwukrotni": Z.Bartold, P.Jędrzejewicz, H.Kasprzak, T.Komorowski, H.Kornacki, Z.Koza, D.Kurpiel, J.Małopolski, E.Orzechowski, K.Pióro, S.Solecki, G.Zakrzewski;
„jednokrotni": T.Biegański, W.Boratyński, M.Czerniakowska, P.Figurny, M.Fiszer, Z.Galias, T.Grzesiak, K.Hryniewiecki, K.Jachacy, A.Krzysztofowicz, P.Kubit, A.Langer, R.Latała, J.Mańdziuk, M.Marczak, R.Mazurek, H.Mikołajczak, M.Mikucki, J.Milczarek, R.Mitraszewski, J.Olszewski, W.Olszewski, M.Roman, A.Ruszel, A.Smolczyk, Z.Surduka, W.Szymczyk, K.Trautman, P.Wach, A.Wyrwa, M.Zając, Z.Zaus.

Zadanie 223. [W trójkącie ABC: $|\sphericalangle C| = 3 \cdot |\sphericalangle A| \Longrightarrow h_C < \frac{1}{2}|AB|$] (współczynnik trudności $WT = 2{,}04$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 14$). Autorami rozwiązań eleganckich – to znaczy z przewagą geometrii nad rachunkami – byli: **J. Janowicz**, **M. Kasperski**, **J. Olszewski**, **K. Witek** oraz **P. Gadziński**, którego dowód tu przytaczamy:



$|\sphericalangle CDB| = 2\alpha = |\sphericalangle DCB| \Longrightarrow |BC| = |BD|$; stąd $|AB| = |AD| + |DB| = |CD| + |CB| \geq 2|CE|$, przy czym nierówność jest ostra, bo co najmniej jeden z punktów B i C nie pokrywa się z E.

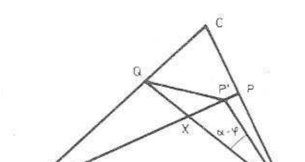
Autor rozwiązania nie poprzestał na tym, ale postawił pytanie, czy współczynnik 1/2 da się „poprawić"; to znaczy, jakie jest minimum stosunku $|AB| : |CE|$; przy użyciu trygonometrii i rachunku różniczkowego obliczył, że minimum to wynosi

$$\frac{1+\dfrac{3}{\sqrt[3]{2(23+3\sqrt{57})}+\sqrt[3]{2(23-3\sqrt{57})}-2}}{\sqrt{1-\frac{1}{9}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}(23+3\sqrt{57})}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}(23-3\sqrt{57})}-1\right)^2}} = 2{,}284542897\ldots .$$

Zadanie 225. [$f\colon \mathbb{N}\cup\{0\} \to \mathbb{N}\cup\{0\}$, $f(f(n)) + f(n) = 2n + 6$; $f = ?$] ($WT = 1{,}89$; $LPR = 14$). Krótkie, zgrabne rozwiązanie (**P. Kumor**): Ustalmy $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ i przyjmijmy $a_0 = k$, $a_{n+1} = f(a_n)$, $d_n = a_{n+1} - a_n$. Z podanego równania wynika rekurencja $a_{n+2} + a_{n+1} = 2a_n + 6$, a z niej $d_{n+1} = 6 - 2d_n$, skąd przez indukcję: $d_n = 2 + (-2)^{n+1} + (-2)^n d_0$. Wobec tego $a_n = k + (d_0 + \ldots + d_{n-1}) = k + 2n + \frac{1}{3}(2 - d_0)((-2)^n - 1)$; a skoro $a_n \geq 0$ dla wszystkich n, zatem d_0 musi się równać 2. Ostatecznie $a_n = k + 2n$ i w szczególności $f(k) = a_1 = k + 2$.

Zadanie 226. [$0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$; $b_n = n - \sum_{i=1}^{n}(a_{i-1}/a_i)$ $\Longrightarrow$ (ciąg (a_n) jest zbieżny $\Longleftrightarrow$ ciąg (b_n) jest zbieżny)] ($WT = 2{,}52$; $LPR = 9$). Ta równoważność, w sformułowaniu: (szereg $\sum_{i=1}^{\infty}(a_{i-1} - a_i)/a_i$ jest zbieżny $\Longleftrightarrow$ ciąg (a_n) jest zbieżny) – jest znana pod nazwą *kryterium Sapogowa*; można ją znaleźć na przykład w podręczniku Fichtenholza. Na ten fakt zwrócili uwagę panowie **T. Kulpa** i **T. Wietecha**.

Zadanie 227. [W trójkącie ABC: punkty P i Q leżą na bokach BC i AC, $|AC| \geq |BC|$; $|\sphericalangle BAP| : |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABQ| : |\sphericalangle ABC| \Longrightarrow |AP| \geq |BQ|$] ($WT = 3{,}11$; $LPR = 5$). Najładniejsze rozwiązanie (**Barbara Wolnik**): Oznaczając $|\sphericalangle CAB| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $|\sphericalangle PAB| = \varphi$, $|\sphericalangle ABQ| = \psi$ mamy $\varphi/\alpha = \psi/\beta$ oraz $\alpha \leq \beta$, $\varphi \leq \psi$, skąd $\alpha - \varphi \leq \beta - \psi$; istnieje więc na odcinku XP taki punkt P', że $|\sphericalangle XBP'| = \alpha - \varphi = |\sphericalangle XAQ|$.



Zatem na czworokącie $QABP'$ można opisać okrąg, którego promień oznaczymy przez r. Z nierówności $\alpha \leq \alpha + \psi - \varphi < 180° - \beta + \psi - \varphi \leq 180° - \alpha$ wynika, że $\sin(\alpha + \psi - \varphi) \geq \sin\alpha$; wobec tego $|AP| \geq |AP'| = 2r\sin|\sphericalangle ABP'| = 2r\sin(\psi + \alpha - \varphi) \geq 2r\sin\alpha = |BQ|$.

Zadanie także rozwiązali poprawnie (rozważając ilorazy funkcji trygonometrycznych zależnych od parametru i badając ich wypukłość względem parametru): **P. Gadziński**, **H. Kornacki**, **T. Kulpa**, **T. Wietecha**, a z niewielkimi usterkami – **J. Olszewski** i **M. Rotkiewicz**.

Zadanie 230. [$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła; dowieść, że $\big(\exists\, a, b, c$ (różne): $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a\big) \Longrightarrow \big(\exists\, t, u, v, w$ (różne): $f(t) = u$, $f(u) = v$, $f(v) = w$, $f(w) = t\big)$ oraz że nie zachodzi implikacja przeciwna] ($WT = 3{,}17$; $LPR = 4$). Autorzy poprawnych rozwiązań (nie prostszych od naszego): **B. Wolnik**, **P. Kumor**, **P. Gadziński**, **T. Kulpa**; ponadto kilka dobrych rozwiązań drugiej części zadania (kontrprzykłady: funkcje przedziałami liniowe).

Zadanie jest szczególnym przypadkiem *twierdzenia Szarkowskiego*, które mówi, że jeśli liczby naturalne $k = 2^\alpha p$, $m = 2^\beta q$ ($\alpha, \beta \geq 0$, p, q nieparzyste) spełniają którykolwiek z następujących warunków: (i) $\alpha < \beta$, $p > 1$; (ii) $\alpha = \beta$, $1 < p < q$; (iii) $p > q = 1$; (iv) $\alpha > \beta$, $p = q = 1$ – to z istnienia cyklu iteracyjnego długości k (funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) wynika istnienie cyklu długości m, ale nie na odwrót (w naszym zadaniu: $k = 3$, $m = 4$).

Autorzy kilku prac powołują się na twierdzenie Szarkowskiego, odsyłając do *Zbioru zadań z olimpiad matematycznych* (t. 6), gdzie to twierdzenie jest cytowane, nie dość, że bez dowodu (vide: *Regulamin*, p. **11**), to na dodatek z usterką w sformułowaniu (zbędne słowo „pierwszych"). „Rozwiązania" takie nie zostały, oczywiście, uznane.

Zadanie 231. [Dla kątów trójkąta: $\sqrt{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \geq 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2$] ($WT = 3{,}82$; $LPR \leq 1$). Trudne! Jedyny dowód zasadniczo poprawny, choć nie w pełni zadowalający (maksymizacja przy użyciu rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych, z numerycznym rozwiązaniem uzyskanego w jednym przypadku układu równań trygonometrycznych) przysłał pan **M. Matlęga**.

Zadanie 239. [Dane $n \geq 3$; znaleźć kresy wyrażenia $\sum_{k=1}^{n} a_k/(a_k + a_{k+1} + a_{k+2})$, $a_k > 0$ ($a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$)] (WT=2,40; LPR=6). Dobre rozwiązania (tą samą metodą, co nasze) podali: **M. Kasperski**, **J. Kraszewski**, **I. Królak**, **J. Olszewski**, **M. Rotkiewicz**, **T. Wietecha**; Kraszewski i Olszewski z uogólnieniem na m składników w mianowniku (zamiast trzech); kresy w tym ogólniejszym przypadku wynoszą 1 oraz $n - m + 1$.

Zadanie 242. [W każdym wierzchołku trójkąta ABC jest masa 1; okrążamy trójkąt, w każdym kroku przerzucając połowę masy zgromadzonej przy danym (kolejnym) wierzchołku do następnego wierzchołka (startujemy z A); po n rundach mamy w wierzchołku A liczbę a_n; $\lim a_n = ?$] ($WT = 1{,}71$; $LPR = 8$). Na uwagę zasługują rozwiązania, których autorzy **J. Kraszewski** i **J. Olszewski** elegancko operują pojęciami granicy górnej i granicy dolnej. Oto pierwsze z tych rozwiązań: dochodzimy do rekurencji $a_n = \frac{5}{8}a_{n-1} - \frac{1}{8}a_{n-2} + \frac{3}{4}$ (por. *Delta* 9/1992). Niech $g = \limsup a_n$, $d = \liminf a_n$. Mamy więc

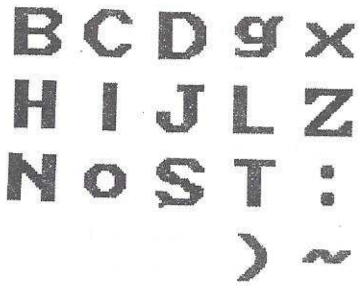
$$g \leq \tfrac{5}{8} \cdot \limsup a_{n-1} + \tfrac{1}{8} \cdot \limsup(-a_{n-2}) + \tfrac{3}{4} = \tfrac{5}{8}g - \tfrac{1}{8}d + \tfrac{3}{4},$$
$$d \geq \tfrac{5}{8} \cdot \liminf a_{n-1} + \tfrac{1}{8} \cdot \liminf(-a_{n-2}) + \tfrac{3}{4} = \tfrac{5}{8}d - \tfrac{1}{8}g + \tfrac{3}{4},$$

skąd $3g \leq 6 - d$, $3d \geq 6 - g$, a to pociąga $d = g = 3/2 = \lim a_n$.

T. Wietecha rozważa analogiczne zagadnienie dla m-kąta i zauważa, że ciąg wartości uzyskanych po n pełnych rundach w wierzchołku, w którym dokonuje się „pomiaru", jest zbieżny do granicy $2s/(m+1)$ (gdzie s oznacza sumę liczb we wszystkich wierzchołkach, daną na starcie); jeśli *w tych samych momentach* będziemy notować wartość zgromadzoną w dowolnym innym wierzchołku, uzyskamy ciąg zbieżny do granicy $s/(m+1)$, przy czym wyniki te nie zależą od „rozkładu masy" w chwili startu. Oblicza też, że dla trójkąta, po 10 rundach mamy w wierzchołkach A, B, C odpowiednio liczby $\frac{1610604095}{1073741824}$, $\frac{402661463}{536870912}$, $\frac{805298451}{1073741824}$, różniące się o mniej niż 10^{-5} od wartości granicznych $3/2$, $3/4$, $3/4$.

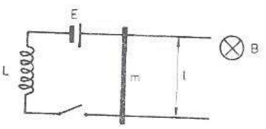
Zadania z fizyki nr 153,154

Redaguje Jerzy B. BROJAN



153. Na okładce przedstawione są obrazy dyfrakcyjne powstałe w wyniku przejścia fali przez odpowiedni otwór. Kształty otworów przedstawione są obok. Zakładamy, że fala pada na otwór prostopadle, a potem jest obserwowana na bardzo odległym ekranie (lub też – w przypadku fali świetlnej – przechodzi przez soczewkę skupiającą, a ekran znajduje się w płaszczyźnie ogniskowej). Długość fali jest mniejsza od rozmiarów otworu. Przyporządkować obrazy dyfrakcyjne właściwym otworom. Objaśnić zasady rozumowania.

Uwaga. Gdy otwór ma większą powierzchnię, ogólne natężenie fali jest – oczywiście – większe. Tym kryterium nie należy się kierować, gdyż dla każdego rysunku pomnożono natężenie przez inny współczynnik korekcyjny.



154. Narysowany obok obwód znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B, prostopadłym do płaszczyzny rysunku. Prawą część obwodu tworzy pręt o masie m, który może bez tarcia ślizgać się po poziomych szynach odległych o l. Opisać ruch pręta po zamknięciu klucza. Opór obwodu pominąć.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1992

Przypominamy treść zadań:

145. Rozchodzeniu się dźwięku na duże odległości towarzyszy często występowanie zewnętrznej strefy słyszalności oddzielonej strefą ciszy od bezpośredniej okolicy źródła dźwięku. Objaśnić to zjawisko i obliczyć lub orientacyjnie ocenić promień zewnętrznej strefy słyszalności zakładając, że temperatura powietrza maleje od $-10°C$ przy powierzchni do $-70°C$ na wysokości 13 km, a następnie rośnie do $0°C$ na wysokości 50 km.

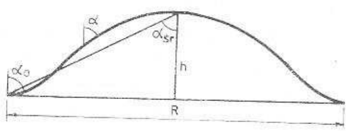
Wskazówka. Prędkość dźwięku w gazie dana jest wzorem $v = \sqrt{RT/\mu\kappa}$ gdzie μ – masa molowa, $\kappa = c_p/c_v$.

146. Dwie płaskie, równoległe i nieskończone płyty przewodzące są uziemione i odległe o d. W połowie odległości między płytami znajduje się punktowy ładunek q. Obliczyć siłę działającą na każdą z płyt.

145. Przyczyną zjawiska jest całkowite wewnętrzne odbicie dźwięku (analogiczne do znanego z optyki) od warstwy, w której prędkość dźwięku jest większa, niż przy powierzchni ziemi. Aby zbadać drogę „promienia dźwiękowego" można przyjąć, że mamy do czynienia z układem poziomych warstw powietrza, przy czym w obrębie każdej warstwy prędkość dźwięku jest stała. Przy przejściu z jednej warstwy do drugiej następuje załamanie, a stosując do niego prawo Snella oraz podany wzór na prędkość dźwięku nietrudno wyprowadzić zależność

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0} = \frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}},$$

gdzie α – kąt nachylenia promienia do pionu w warstwie, w której prędkość wynosi v, α_0 i v_0 – analogiczne wartości początkowe. Biorąc pod uwagę podaną zależność temperatury od wysokości możemy naszkicować drogę dźwięku.



Aby obliczyć orientacyjnie promień R strefy słyszalności, przyjmijmy, że początkowy kąt α_0 jest bliski 90°, zatem minimalna wartość $\sin\alpha$ wynosi

$$\sin\alpha_{min} = \sqrt{\frac{T_{min}}{T_0}} = \sqrt{\frac{203}{263}} \approx 0,88.$$

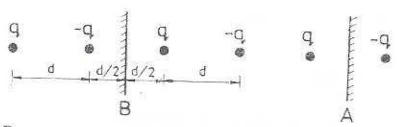
Jeśli założymy, że średnia wartość $\sin\alpha$ od punktu początkowego do maksymalnego wzniesienia jest równa

$$\sin\alpha_{śr} = \frac{1}{2}(\sin 90° + \sin\alpha_{min}) = 0,94,$$

to z równania $\operatorname{tg}\alpha_{śr} = \dfrac{R}{2h}$ (gdzie $h = 50$ km) możemy obliczyć $R = 2h\operatorname{tg}\alpha_{śr} \approx 276$ km. Dokładniejszy rachunek numeryczny uwzględniający zmieniającą się wartość kąta daje wynik $R \approx 330$ km. Niestety, wynik ten niezbyt dobrze odpowiada rzeczywistości, gdyż obserwowana zewnętrzna strefa słyszalności ma promień 150 – 200 km. Autor nie jest pewien, które z przyjętych założeń należałoby zmodyfikować w celu poprawienia wyniku.

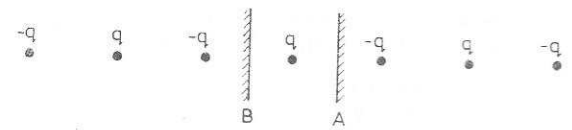
146. Pole ładunku oraz **jednej** nieskończonej płyty można znaleźć korzystając z metody odbicia (rys. b). Według niej pole na lewo od płaszczyzny A jest sumą pola ładunku q oraz fikcyjnego ładunku $-q$ położonego symetrycznie względem q (ładunek ten zastępuje ładunki indukowane na A).

Po wprowadzeniu drugiej płaszczyzny B pole obu tych ładunków indukuje na B nowe ładunki. Stosując ponownie metodę odbicia zastępujemy na prawo od B pole ładunków indukowanych przez pole dwóch fikcyjnych ładunków $-q$ i q (rys. a).



Rys. a Rys. b

Dodatkowe ładunki z kolei działają na A indukując następne ładunki... itd., itd. Ostatecznie pole pomiędzy płaszczyznami A i B jest nieskończoną sumą pól ładunków q i $-q$ na przemian.



Siła przyciągania płaszczyzny A przez płaszczyznę B oraz przez rzeczywisty ładunek w środku jest równa sumie sił przyciągania wszystkich fikcyjnych ładunków na lewo od A przez wszystkie ładunki na prawo od A, tzn.

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(2d)^2} + \frac{1}{(3d)^2} - \frac{1}{(4d)^2} + \dots\right.$$
$$- \frac{1}{(2d)^2} + \frac{1}{(3d)^2} - \frac{1}{(4d)^2} + \dots$$
$$\left. + \frac{1}{(3d)^2} - \frac{1}{(4d)^2} + \dots\right]$$

Pierwszy wiersz tego wyrażenia jest sumą sił działających na pierwszy ładunek, drugi – sumą sił działających na drugi ładunek itd. Otrzymaliśmy więc sumę

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(1 - \frac{2}{4} + \frac{3}{9} - \frac{4}{16} + \dots\right) =$$
$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right),$$

którą – korzystając ze wzoru na rozwinięcie w szereg funkcji $\ln(1+x)$ – można sprowadzić do prostego wyrażenia

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\ln 2.$$

Lista uczestników
ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 139 ($WT=1,41$) i 140 ($WT=2,80$)
z numeru 5/1992

Paweł Perkowski	– 1 –	44,95
Dzierżysław Lipniacki	– 3 –	29,11
Tomasz Wietecha	– 1 –	26,12
Przemysław Gworys	– 1 –	25,69
Anna Gluza	– 1 –	24,35
Andrzej Nowogrodzki	–	19,29
Dariusz Wilk	–	18,75
Andrzej Borowski	– 1 –	17,33
Konrad Banaszek	–	13,70
Jacek Piotrowski	–	12,08
Zbigniew Kapała	–	9,92
Sławomir Oszwałdowski	–	9,16
Artur Poliński	–	9,14

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z rocznika 1990, 1991 lub 1992, oraz mają na swoim koncie co najmniej 9 punktów w bieżącej rundzie. Cyfra przed kreską oznacza, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty. Prowadzący pan Perkowski właśnie zakończył drugą rundę.

Pozostali członkowie **Klubu 44F** (alfabetycznie; liczba w nawiasach oznacza wielokrotność przekroczenia 44 punktów): Piotr Bała (3), Wiesław Kacprzak (1), Jerzy Lipkowski (2), Bogusław Mikielewicz (1), Leszek Motyka (1, przy okazji skorygujmy zeszłoroczną pomyłkę: jest 5,80 punktu), Roman Musiał (1), Tomasz Rawlik (1), Robert Repucha (1), Adam Sikorski (3), Jacek Stelmach (1), Aleksander Surma (2), Leszek Szalast (1), Piotr Wach (1).

Liczba uczestników ligi fizycznej utrzymuje się od dłuższego czasu na stałym, niskim poziomie. Pocieszającym objawem jest jedynie zahamowanie tendencji spadkowej i kilka udanych debiutów, jakie miały miejsce w ciągu ostatniego roku. Oby było to zapowiedzią nadchodzącego „odbicia się od dna". Może zadanie z okładki tego numeru wciągnie do ligi nowych zawodników?

A oto omówienie niektórych zadań.

Zadanie **123**. [Pudełko z nieznanym obwodem, znaleźć wartości R, L i C] ($WT = 1,97$; $LPR = 7$). Duża liczba prawidłowych odpowiedzi, jak zwykle przy zadaniach dotyczących obwodów elektrycznych. Jednak tylko dwa rozwiązania były bezbłędne: **R. Nowaka** i **P. Perkowskiego**.

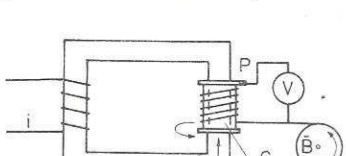
Zadanie **125**. [Soczewka; znaleźć kształt ekranu] ($WT = 2,70$, $LPR = 1$). Jedyne zadowalające rozwiązanie nadesłał **P. Perkowski**. Pan **A. Sikorski** poprzestał na podaniu odsyłacza do książki (zgodnie z punktem 11 regulaminu) – ale w cytowanym podręczniku nie ma żadnego dowodu, że taki kształt ekranu jest prawidłowy. Regulamin wymaga zaś, aby wskazane źródło zawierało kompletne rozwiązanie.

Zadania **126** i **133**. [Wirująca kulka] (126: $WT = 3,60$; $LPR = 0$; 133: $WT = 4,00$; $LPR = 0$). Zadania okazały się za trudne dla uczestników ligi – pierwsze z nich próbowały jeszcze rozwiązać dwie osoby (ze słabymi efektami), ale w drugim wszyscy z góry zrezygnowali i w rezultacie padł rekord współczynnika trudności.

Zadanie **129**. [Zawieszony na jednym końcu wirujący łańcuszek] ($WT = 2,08$; $LPR = 2$) i Zadanie **130**. [Gaz wypływający przez mały otworek] ($WT = 3,40$; $LPR = 1$). Doprawdy dziwnymi drogami chadza czasem wartość WT! W tym zestawie rolę lokomotywy autor wyznaczył zadaniu 130, którego rozwiązanie sprowadza się do dwóch-trzech banalnych stwierdzeń na temat ruchu cząsteczek w gazach. Znacznie trudniejsze było natomiast zadanie 129, wymagające całkowania numerycznego lub też zbadania nieelementarnego równania różniczkowego. Okazało się, że aż pięciu uczestników spróbowało sił w zadaniu 129 i przeprowadziło co najmniej prawidłową analizę wymiarową; do końca rozwiązali bezbłędnie **Dz. Lipniacki** i **A. Sikorski**. Pan Lipniacki już po raz drugi wykazał się tu znajomością funkcji specjalnych, dzięki czemu uniknął obliczeń numerycznych. Do zadania 130 jedyne prawidłowe rozwiązanie nadesłał **D. Wilk**.

Zadanie **135**. [Interferencja elektronów] ($WT = 2,56$; $LPR = 2$). Choć dosyć proste, zadanie to sprawiło niektórym poważne kłopoty. Kilku uczestników obliczało różnicę między czasem przejścia elektronu jedną i drugą drogą, a potem przeliczało tę różnicę na przesunięcie fazy. Zasadniczy błąd polega tu na tym, że prędkość elektronu jest – z falowego punktu widzenia – tzw. prędkością grupową, podczas gdy w tej metodzie istotna byłaby inna wielkość – prędkość fazowa. Dzieląc drogę przez długość fali de Broglie'a omija się te trudności – tak właśnie rozwiązali zadanie **K. Banaszek** i **P. Perkowski**.

Zadanie **137**. [Obracająca się cewka nawija drut; jakie jest wskazanie woltomierza dołączonego poprzez styki ślizgowe?] ($WT = 3,33$; $LPR = 0$). Nie ma to zadanie szczęścia do korekty; najpierw rysunek został wydrukowany odwrotnie, a przy rozwiązaniu opuszczono go całkowicie. Niech więc choć teraz Czytelnicy zobaczą go we właściwej formie.



Rozwiązań prawidłowych nie było – wszyscy stosowali rutynowo wzór $E = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ nie dostrzegając paradoksu. A wystarczyło zastanowić się nad bilansem energii – przecież SEM indukcji może wykonać pracę tylko kosztem ruchu przewodnika w polu magnetycznym lub kosztem energii, której dostarcza źródło zmiennego pola magnetycznego. Żadna z tych ewentualności tu nie występowała.