epsilon
3/93
(25)

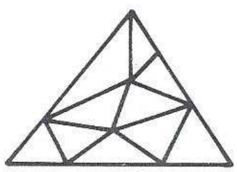
Matematyka na falach eteru

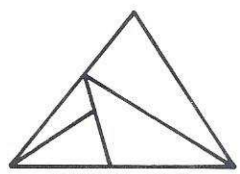
Jedna z prywatnych rozgłośni radiowych organizuje od czasu do czasu konkurs: ogłasza pytanie, gdy zadzwonisz i odpowiesz poprawnie jako pierwszy, otrzymasz nagrodę. Oto, co niedawno usłyszeliśmy:
PYT.: – Ile wynosi rząd macierzy zerowej?
ODP.: – Zero.
PYT.: – Znakomicie! A pytanie poza konkursem – co to jest macierz zerowa?
ODP.: – Nie mam pojęcia.

Mieszkaniowy dowód lematu Spernera

W teorii punktów stałych ważną rolę odgrywa kombinatoryczno-geometryczny lemat o podziale trójkąta, udowodniony przez niemieckiego matematyka Emanuela Spernera (1905–1980) w 1928 roku. Brzmi on następująco:

Lemat 1. Załóżmy, że wierzchołki trójkąta T są ponumerowane liczbami 1, 2 i 3. Trójkąt podzielony jest na małe trójkąty, przy czym częścią wspólną dwóch trójkątów podziału jest albo wspólny bok obu trójkątów, albo wspólny wierzchołek obu trójkątów, albo zbiór pusty. Wierzchołki małych trójkątów numerujemy według zasady: jeśli wierzchołek leży na boku trójkąta T, to ma numer taki, jak jeden z końców tego boku; wierzchołki leżące wewnątrz trójkąta T są ponumerowane liczbami 1, 2 i 3 w dowolny sposób. Wtedy istnieje trójkąt podziału, którego wierzchołki mają numery 1, 2 i 3. Co więcej, liczba takich trójkątów jest nieparzysta.


podział „dobry”

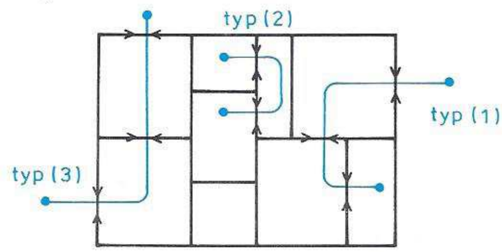

podział „zły”

Oto jednowymiarowy odpowiednik powyższego lematu:

Lemat 2. Dzielimy odcinek za pomocą skończonej liczby punktów na odcinki mniejsze; lewy koniec dużego odcinka ma numer 1, prawy – numer 2, punktom podziału przypisujemy numery 1 i 2 w sposób losowy. Istnieje wówczas odcinek mały o końcach z numerami 1 i 2; co więcej, liczba takich odcinków jest nieparzysta. Oba lematy (chociaż drugi jest niemal oczywisty) udowodnimy metodą mieszkaniowo-drzwiową.

Wyobraźmy sobie wielopokojowe mieszkanie, przy czym każdy pokój ma 0, 1 lub 2 drzwi (dopuszczamy istnienie pokojów bez drzwi). Niektóre drzwi mogą być zewnętrzne (wyprowadzać na zewnątrz mieszkania). Wykażemy, że liczba drzwi pozwalających wyjść z mieszkania i liczba pokojów z jednymi drzwiami są tej samej parzystości.

Dla dowodu pospacerujmy po mieszkaniu – jednakże według pewnych reguł: otóż przez każde drzwi przechodzimy dokładnie raz. Każdy spacer zaczynamy i kończymy na zewnątrz mieszkania lub w pokoju z jednymi drzwiami; dzięki temu, że żaden pokój nie ma więcej niż dwoje drzwi, nasz spacer jest jednoznacznie określony początkiem i końcem (kierunek wędrówki nie gra roli).



Rozważmy teraz takie spacery, po których – w sumie – „zaliczymy” wszystkie drzwi (każde raz). Mogą pojawić się drogi trzech rodzajów:
1) od drzwi zewnętrznych do pokoju z jednymi drzwiami (lub na odwrót),
2) od drzwi zewnętrznych do drzwi zewnętrznych,
3) od pokoju z jednymi drzwiami do pokoju z jednymi drzwiami.

Niech m, n i p oznaczają odpowiednio liczbę dróg pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju. Wtedy liczba zewnętrznych drzwi wynosi $m + 2n$, natomiast pokojów z jednymi drzwiami $m + 2p$. Oczywiste jest, że liczby $m + 2n$ i $m + 2p$ mają tę samą parzystość.

Teraz wykażemy Lemat 2; niech odcinek będzie mieszkaniem, małe odcinki pokojami, a drzwiami wierzchołki o numerze 1. Wówczas pokojem z jednymi drzwiami będzie odcinek o wierzchołkach z numerami 1 i 2. Drzwi zewnętrzne są tylko jedne (lewy koniec dużego odcinka), więc liczba pokojów z jednymi drzwiami jest nieparzysta (w szczególności różna od zera).

Dla dowodu Lematu 1 przyjmijmy, że mieszkanie to duży trójkąt, pokoje zaś – małe trójkąty. Drzwi – to boki małych trójkątów, oznaczone jedną jedynką i jedną dwójką. Pokój z jednymi drzwiami to trójkąt o wierzchołkach (1,2,3), drzwiami zaś wyprowadzającymi na zewnątrz odcinki (1,2) leżące na bokach dużego trójkąta (z założenia wynika, że muszą one być na boku o końcach 1 i 2). Na mocy Lematu 2 liczba tych ostatnich jest nieparzysta, a więc i liczba trójkątów typu (1,2,3) – czyli pokojów z jednymi drzwiami – też.

Powtarzając to rozumowanie możemy wykazać lemat Spernera dla piramidy o wierzchołkach (1,2,3,4).

Armen EDIGARIAN

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.