

Rozwiązać równanie $y^x = x^y$

Rozwiążemy to równanie przy założeniu, że $x > 0$ i $y > 0$. Otóż pary postaci (v, v) , gdzie $v > 0$, są rozwiązaniami równania.

Przypuśćmy teraz, że para (x, y) , gdzie $x \neq y$, jest też rozwiązaniem równania.

Wtedy $y = ax$, dla pewnego $0 < a \neq 1$, oraz prawdziwe są równości

$$\begin{aligned} (ax)^x &= x^{ax}, & ax &= x^a, & a &= x^{a-1}, \\ x &= a^{\frac{1}{a-1}}, & y &= a \cdot a^{\frac{1}{a-1}}, & y &= a^{\frac{a}{a-1}}. \end{aligned}$$

Zatem wykazaliśmy, że jeśli (x, y) , gdzie $x \neq y$, jest rozwiązaniem równania, to $(x, y) = (a^{\frac{1}{a-1}}, a^{\frac{a}{a-1}})$, gdzie $0 < a \neq 1$. Innymi słowy, wykazaliśmy, że jedynie pary postaci $(a^{\frac{1}{a-1}}, a^{\frac{a}{a-1}})$, gdzie $0 < a \neq 1$, są potencjalnymi „kandydatami” na rozwiązania równania leżące poza półprostą $y = x$, $x > 0$.

Czy „kandydaci ci przejdą”, przekonamy się przez sprawdzenie. Mamy więc sprawdzić, czy zachodzi równość

$$\left(a^{\frac{a}{a-1}}\right)^{a^{\frac{1}{a-1}}} = \left(a^{\frac{1}{a-1}}\right)^{a^{\frac{a}{a-1}}}.$$

Przekształcając równoważnie mamy

$$\left(a^{\frac{a}{a-1}}\right)^{a^{\frac{1}{a-1}}} = \left(a^{\frac{1}{a-1}}\right)^{a \cdot a^{\frac{1}{a-1}}}, \quad a^{\frac{a}{a-1}} = \left(a^{\frac{1}{a-1}}\right)^a - \text{prawda oczywista.}$$

Odp. Wszystkimi rozwiązaniami równania są pary postaci (a, a) , gdzie $a > 0$, oraz pary postaci $(a^{\frac{1}{a-1}}, a^{\frac{a}{a-1}})$, gdzie $0 < a \neq 1$.

Robert HAJŁASZ

Odcinek dla poczty	Odcinek dla posiadacza rachunku	Potwierdzenie dla wpłacającego
Zł	Zł	Zł
słownie złotych	słownie złotych	słownie złotych
Dokładny adres wpłacający	Dokładny adres wpłacający	Dokładny adres wpłacający
na r-k AMOS	na r-k AMOS	na r-k AMOS
Dokładna nazwa 01-506 Warszawa	Dokładna nazwa 01-506 Warszawa	Dokładna nazwa 01-506 Warszawa
ul. Szenwalda 1	ul. Szenwalda 1	ul. Szenwalda 1
nazwa banku PKO VIII O/W-wa	nazwa banku PKO VIII O/W-wa	nazwa banku PKO VIII O/W-wa
Nr r-ku 1586-77578-136	Nr r-ku 1586-77578-136	Nr r-ku 1586-77578-136
stempel	stempel	stempel
podpis przyjmującego	podpis przyjmującego	podpis przyjmującego
Pobrano opłatę	Pobrano opłatę	Pobrano opłatę
zł	zł	zł