

Trójwymiarowe twierdzenie Pitagorasa

Nawet najbardziej krnąbrni i odporni na wiedzę uczniowie znają twierdzenie Pitagorasa (tak przynajmniej było w zamierzonych czasach, gdy autor niniejszego tekściku kończył szkołę podstawową) mówiące o tym, że w trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych równa jest kwadratowi długości przeciwprostokątnej. Opowiemy krótko o ładnym uogólnieniu tego twierdzenia.

Wyobraźmy sobie czworościan $ABCS$ o tej własności, że kąty ASC , CSB oraz BSA są proste (chciałoby się rzec: *czworościan prostokątny*). Udowodnimy, że dla takiego czworościanu

$$(1) \quad S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta ASC}^2 + S_{\Delta BSC}^2 + S_{\Delta ASB}^2$$

($S_{\Delta ABC}^2$ oznacza tu kwadrat pola trójkąta ABC , itp.).

Niech w będzie wysokością opuszczoną z wierzchołka S na ścianę ABC (rys).

Popatrzmy na trójkąty ASC i ABC ; mają one wspólną podstawę AC , zatem stosunek k ich pól jest równy stosunkowi wysokości opuszczonych na bok AC . Zauważmy, że wysokość trójkąta ASC otrzymujemy rzutując wysokość trójkąta ABC prostopadłe na płaszczyznę ASC ; stąd wynika, że $k = \cos \beta$, gdzie β jest kątem pomiędzy płaszczyznami ABC i ASC , albo – co na jedno wychodzi – pomiędzy wysokością w i prostą BS (patrz margines). Stąd $S_{\Delta ASC}^2 = \cos^2 \beta S_{\Delta ABC}^2$.

Podobnie możemy wyznaczyć stosunki kwadratów pól trójkątów BSC i ASB do kwadratu pola trójkąta ABC ; są one odpowiednio równe $\cos^2 \alpha$ i $\cos^2 \gamma$, gdzie α i γ to kąty pomiędzy wysokością w a prostymi SA i SC . Stąd już tylko krok do wzoru

$$(2) \quad (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \cdot S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta BSC}^2 + S_{\Delta ASC}^2 + S_{\Delta ASB}^2$$

Wystarczy jeszcze tylko zauważyć, że suma kwadratów cosinusów w nawiasie po lewej stronie (2) jest równa 1 – wynika to natychmiast z twierdzenia Pitagorasa. (Czytelnik sam zechce zauważyć, w jaki sposób; nie sprawi mu to dużych trudności, jeśli kiedykolwiek obliczał długość przekątnej prostopadłościanu mając dane długości krawędzi. Tutaj rolę owej przekątnej spełnia w .)

Chętni mogą teraz bez kłopotu wypisać analogiczne twierdzenia dla czterech, pięciu, sześciu, ... wymiarów.

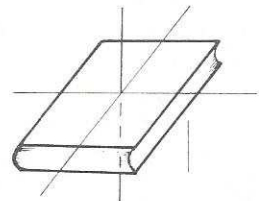
Zapamiętałym rachmistrzom polecamy dowód wzoru (1) z wykorzystaniem wzoru Herona na pole trójkąta.

P. S.

Wirująca książka

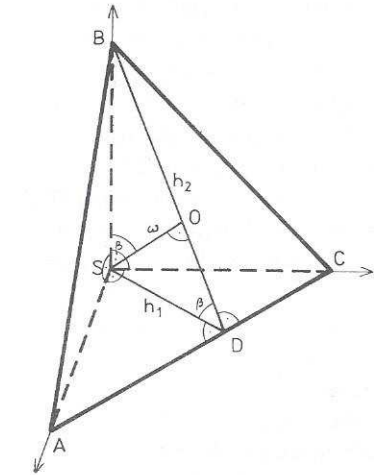
Weź książkę, najlepiej w sztywnej okładce, i nałóż na nią gumkę, aby się nie otwierała. Podrzuc ją teraz do góry wprawiając w ruch obrotowy.

Można ją wprawić w obrót wokół trzech osi zaznaczonych na rysunku. Przekonasz się, że obrót wokół dwóch z tych trzech osi jest stabilny, natomiast wokół trzeciej – nie. Książka, oprócz obrotu, wykonuje jeszcze wibracje. Dlaczego?

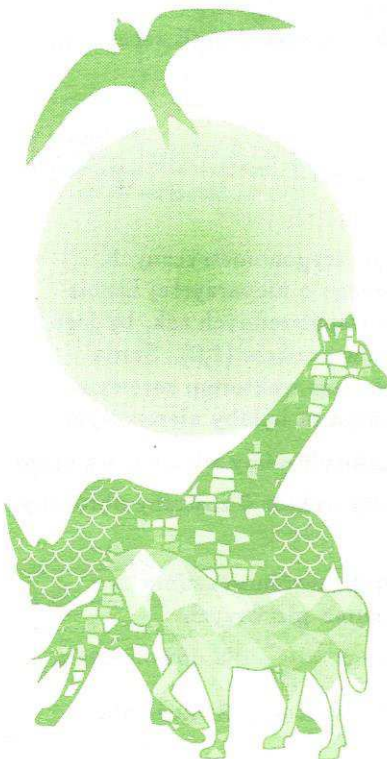


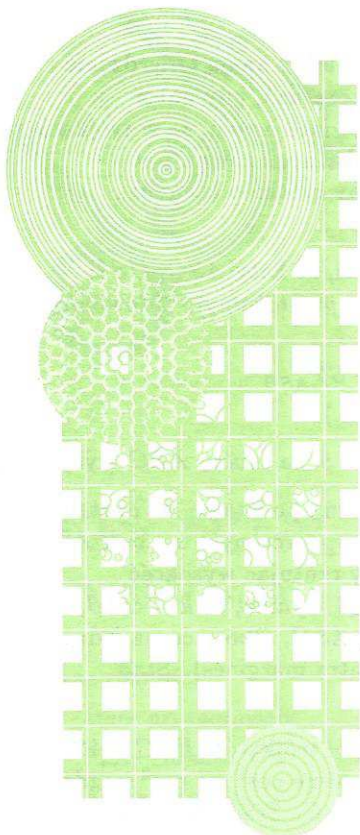
Żeby zjawisko wytłumaczyć w pełni, należy zastosować równanie ruchu bryły sztywnej. Jakościowo można to wytłumaczyć odwołując się do intuicji. Moment bezwładności książki względem dwóch osi jest minimalny i maksymalny; obroty wokół tych osi są stabilne ze względu na małe zaburzenia. Moment bezwładności względem trzeciej osi ma wartość pośrednią i ruch nie jest stabilny. Niewielkie zaburzenia powodują wibracje książki.

J. K.



Łatwo zauważyć, że wysokości h_1 i h_2 schodzą się w jednym punkcie, oraz że wysokość w „trafia” w h_2 (dlaczego?). Trójkąt BSD jest prostokątny, więc $\angle BSO = \angle SDB = \beta$.





Korona słoneczna

Dawne obserwacje spektroskopowe korony słonecznej wykazały obecność w niej jakiegoś pierwiastka nie znanego z żadnego laboratorium ziemskiego. Nazwano go koronium. Z biegiem czasu okazało się jednak, że nie jest to nowy pierwiastek, tylko zwyczajne żelazo znajdujące się jednak w niezwykłych warunkach. Otóż przy wysokim rozrzedzeniu pierwiastki mogą dawać linie widmowe odpowiadające przejściom energetycznym niemożliwym do zrealizowania w warunkach normalnych. W tych bowiem warunkach, które uważamy za normalne, atomy dość często zderzają się i pewne ich poziomy energetyczne są wskutek tych nieustannych zaburzeń praktycznie nieosiągalne. Stają się osiągalne dopiero właśnie, gdy atomy między zderzeniami mają „chwile wytchnienia” – a tak jest już w koronie słonecznej. Powstające w taki sposób linie widmowe nazywane są wzbronionymi. Tak więc owe podejrzane linie okazały się wzbronionymi liniami atomów żelaza, ale – i tu znów niespodzianka: żelaza wielokrotnie zjonizowanego. Odkrycie to stwarzało, jak widzimy, kolejną zagadkę: skąd w koronie słonecznej tak wysoka temperatura zdolna spowodować oderwanie się od atomów żelaza kilkunastu elektronów – a potrzeba do tego okrągi licząc miliona stopni. Zdawałoby się, że wysoko nad powierzchnią Słońca powinno być w każdym razie nie goręcej niż na jego powierzchni. Na szczęście i to zostało wyjaśnione. Mianowicie nieustannie wzburzona powierzchnia Słońca jest źródłem fal dźwiękowych. Fale te rozchodzą się w górę w ośrodku o malejącej gęstości, ich amplituda musi zatem rosnąć tak, że w końcu przekształcają się w fale uderzeniowe przekazując swoją energię rzadkiemu gazowi koronalnemu. Grzanie to jest, jak się okazuje, tak silne, że umożliwia utrzymywanie się w koronie słonecznej temperatury rzędu miliona stopni.

T. K.

Zawsze tyle samo

Udowodnić, że

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = \\ & = \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right). \end{aligned}$$

Zadanie to wydaje się okropne, ale można je szybko rozwiązać, jeśli zacznie się od czegoś znacznie mocniejszego: udowodnić, że wartość wyrażenia

$$S = \cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right) + \dots + \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + \dots + \cos\left(\frac{2n\pi}{2n+1}\right)$$

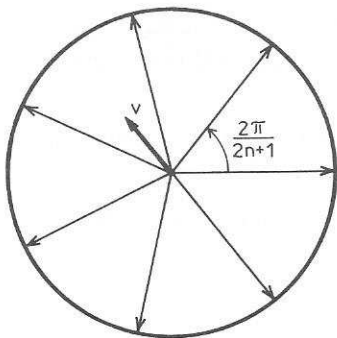
nie zależy od n .

Chcąc to udowodnić nie będziemy sięgali do wzorów trygonometrycznych. Możemy natomiast sięgnąć do ... wielokąta foremnego o nieparzystej liczbie wierzchołków. Umieścimy taki wielokąt w układzie współrzędnych tak, by jego środek był w punkcie $(0,0)$, a jeden z wierzchołków w punkcie $(1,0)$. Suma wektorów łączących $(0,0)$ z wierzchołkami wielokąta jest wektorem zerowym. Gdyby bowiem tak nie było (rys. 1 – tu $n = 3$) i suma ta byłaby niezerowym wektorem \vec{v} , to obracając wielokąt o kąt $\frac{2\pi}{2n+1}$ nałożylibyśmy wielokąt na niego samego; suma nie powinna się zmienić, a tymczasem wektor \vec{v} zostałby obrócony. Obrót nie zmienia tylko wektora zerowego.

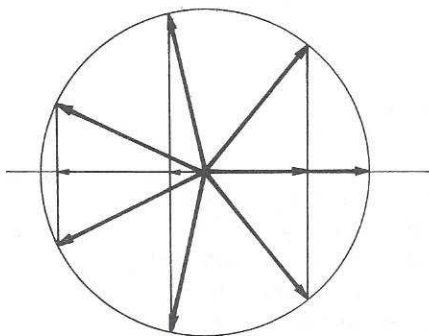
Jeśli suma wektorów jest wektorem zerowym, to w szczególności suma ich pierwszych współrzędnych jest równa zeru. A suma pierwszych współrzędnych (rys. 2) to $1 + 2 \cdot S$, skąd wynika, że $S = -\frac{1}{2}$ dla dowolnego n .

Ciekawe, że analogiczna suma sinusów nie ma stałej wartości. A może dla niektórych n otrzymuje się jednakowe wyniki?

M. K.



Rys. 1



Rys. 2

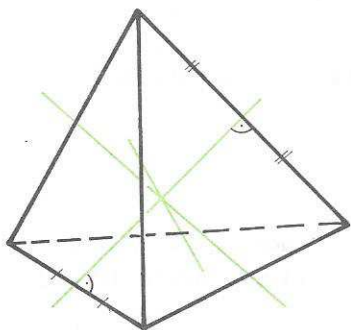
Plamy słoneczne

Obecność plam na Słońcu jest powszechnie znana. Jakoś nikogo jednak nie dziwi, że są one czarne. Jeżeli przecież cała powierzchnia Słońca ma temperaturę zbliżoną do 6000 K, to jakim cudem mogą na niej istnieć tak małe obszary zimne? Otóż wcale nie są one zimne. Plamy to miejsca, gdzie z głębi Słońca wydostają się na zewnątrz tzw. rurki magnetyczne, czyli wiązki linii pola magnetycznego. W plamach jest więc stosunkowo silne pole magnetyczne, które przeszkadza plazmie swobodnie poruszać się. Tymczasem pod powierzchnią Słońca zachodzą silne ruchy konwekcyjne materii (czego widowym przejawem jest granulacja), gdyż tam właśnie konwekcja jest najważniejszym mechanizmem przenoszącym energię. Pole magnetyczne hamując te ruchy utrudnia zarazem wypływ energii z wnętrza Słońca. Skoro więc przez plamę przepływa mniej energii niż obok (na jednostkę powierzchni, oczywiście), to jest w niej po prostu chłodniej, ale zaledwie o około 1500 K. Jasność powierzchniowa zależy jednak aż od czwartej potęgi temperatury, plama więc ma jasność powierzchniową stanowiącą $(4500/6000)^4 \approx 0,3$ jasności czystej powierzchni Słońca. A to już wystarcza, by wskutek kontrastu z tarczą Słońca sama plama wydawała się czarna.

T. K.

Osie symetrii

Czy czworościan może mieć oś symetrii? Prawie każdy o to zapytany próbuje rysować oś przechodzącą przez wierzchołek i błyskawicznie odpowiada, że oczywiście nie może. Tymczasem czworościan foremny ma aż trzy osie symetrii.



Są nimi proste przechodzące przez środki przeciwległych krawędzi (rys. na marginesie). A oto, dlaczego są one osiami symetrii: Każda taka prosta jest symetralną przeciwległych krawędzi. Wobec tego przy symetrii względem takiej prostej wierzchołki przechodzą na wierzchołki, a stąd cały czworościan przechodzi na siebie.

Na rysunku widać, że osie symetrii przecinają się w jednym punkcie. Może jest to niedokładność rysunku? Nie. Rzeczywiście, przecinają się. Zresztą nie jest to takie dziwne. Czworościan ten jest, bądź co bądź, foremny. A może jest to jakaś ogólniejsza własność? Istotnie. Zachodzi następujący fakt:

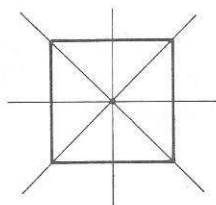
Osie symetrii dowolnego wielościanu przecinają się w jednym punkcie (oczywiście, o ile wielościan ma przynajmniej dwie osie symetrii).

Dowód. Ponieważ przy symetrii względem osi wielościan przechodzi na siebie, więc środek ciężkości pozostanie w tym samym miejscu, nie ruszy się. Oznacza to, że leży on na osi symetrii, na każdej osi symetrii. To zaś oznacza, że środek ciężkości jest punktem przecięcia wszystkich osi symetrii.

Na zakończenie odnotujmy jeszcze jeden ciekawy fakt. Otóż, jeśli wielościan (lub wielokąt) ma przynajmniej jedną oś symetrii, to ma ich nieparzystą liczbę.

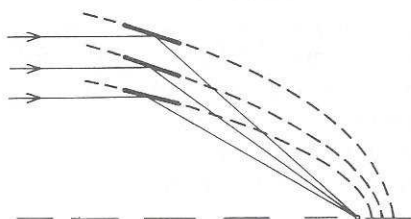
P. H.

Kwadrat ma 5 osi symetrii. Piąta jest prostopadła do kartki.



Teleskop rentgenowski

Od lat obserwują niebo satelity pracujące w zakresie rentgenowskim. Sporządzają one m.in. obrazy fragmentów nieba w tym zakresie. A jak ogniskuje się promienie X, skoro przecież one przenikają przez rozliczne substancje łatwiej niż światło przez szkło? Otóż, wykorzystuje się przy tym fakt, że promieniowanie rentgenowskie padając niemal stycznie na metaliczną powierzchnię odbija się od niej, a nie wnika w głąb. Obiektywem rentgenowskim może być wobec tego tradycyjna paraboloidalna powierzchnia metaliczna, z tym tylko, że jej centralne części są zbędne. Do wykorzystania jest wąski pierścień tej paraboloidy, odległy od osi optycznej, na który równoległa wiązka promieniowania padałaby niemal stycznie. Taki pierścień ma dużo miejsca w centrum, można tam zatem umieścić drugi pierścień wycięty z innej paraboloidy, ale tak dobranej, by z tą pierwszą miała wspólne ognisko itd. W sumie obiektyw rentgenowski składa się z wielu współosiowych paraboloidalnych pierścieni metalicznych o wspólnym ognisku i przypomina wylot wielkiego wentylatora.



T. K.

Phobos

Phobos, pierwszy satelita Marsa, obiega planetę po orbicie w przybliżeniu kołowej o promieniu 9378 km. Znając masę Marsa ($6,42 \times 10^{23}$ kg) łatwo obliczyć, że okres obiegu Phobosa wynosi około 7 godz. 40 min, a więc jest krótszy od okresu obrotu Marsa. Dla stojącego na planecie obserwatora Phobos będzie więc wschodził na zachodzie i zachodził na wschodzie. Jest to jedyny taki przypadek w Układzie Słonecznym.

T. K.

Geometria na kuli

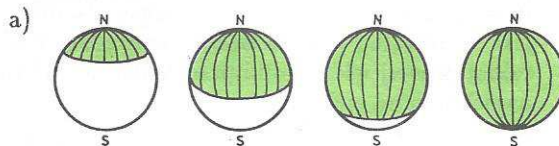
Potraktujmy kulę ziemską jako idealnie gładką kulę o obwodzie 40 000 km. Niech N oznacza biegun północny, S zaś południowy.

Jak będą wyglądać narysowane na powierzchni tej kuli

- koło o środku N i promieniu 20 000 km,
- okrąg o środku N i promieniu 20 000 km,
- odcinek o końcach N i S ,
- środek odcinka o końcach N i S ?

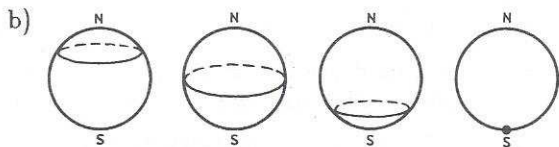
Uwaga. Koło – to brzeg wraz z wnętrzem. Okrąg – to tylko brzeg. Odcinek \overline{NS} składa się ze wszystkich takich punktów P powierzchni kuli, że $NP + PS = NS$; punkt P leży w środku odcinka \overline{NS} , jeśli ponadto $PN = PS$.

Odpowiedzi



To jest odpowiedź, czyli cała powierzchnia kuli.

Koła o coraz większych promieniach.



To jest odpowiedź, czyli okrąg składa się tylko z jednego punktu S .

Okręgi o coraz większych promieniach.

- c) cała powierzchnia kuli.



- d) równik.



R. H.

Hamowanie satelity

Jak zmienia się prędkość sztucznego satelity lekko hamowanego przez bardzo wysokie warstwy ziemskiej atmosfery? Pytanie może wyglądać na niepoważne, dopóki nie uświadomimy sobie, że opór powietrza nie jest jedyną siłą działającą na satelitę. Na satelitę działa wszak stale siła grawitacji. Gdyby nie hamowanie satelita obiegałby Ziemię po kole. Wskutek jednak lekkiego wyhamowania satelita musi nieco obniżyć orbitę, a na niższej orbicie musi poruszać się szybciej – tak wynika z praw Keplera! Oczywiście, rozumowanie to jest słuszne, jeżeli hamowanie jest rzeczywiście słabe, tzn. dopóki satelita porusza się w przybliżeniu zgodnie z prawami Keplera.

T. K.



Rozwiązanie zadania M 664.

Zauważmy, że jeśli wszystkie trzy wierzchołki trójkąta leżą we wnętrzu pewnego prostokąta, to pole trójkąta jest mniejsze od połowy pola prostokąta. (Wystarczy w tym celu rozciąć trójkąt na dwa mniejsze prostą równoległą do jednego z boków prostokąta; wspólna podstawa dwóch mniejszych trójkątów nie przekracza jednego z boków prostokąta, suma zaś wysokości nie przekracza drugiego boku.)

Podzielmy kwadrat na cztery rozłączne kwadraty, każdy o polu $1/4$. Wewnątrz przynajmniej jednego z nich znajdują się trzy spośród danych dziewięciu punktów (zasada szufladkowa Dirichleta!); zgodnie z poprzednią uwagą trójkąt o wierzchołkach w tych punktach ma pole mniejsze od $1/2 \cdot 1/4 = 1/8$.



Rozwiązanie zadania M 665. Zbiór n -elementowy $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ma 2^{n-1} różnych podzbiorów zawierających element a_1 ; każde dwa z nich mają, oczywiście, niepuste przecięcie. Zatem $k \geq 2^{n-1}$.

Ustawmy teraz wszystkie podzbiory zbioru A w 2^{n-1} par biorąc do każdej pary podzbiór i jego uzupełnienie. Jeśli dane jest $m > 2^{n-1}$ różnych podzbiorów A , to (zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta) przynajmniej dwa spośród nich pochodzą z tej samej pary, czyli mają puste przecięcie; zatem k jest równe 2^{n-1} .



Rozwiązanie zadania M 666.

Skorzystamy z faktu, że każdy ciąg liczb naturalnych zawiera element najmniejszy.

Wybermy najpierw niemalejący podciąg $(a_{n_k})_{k=1,2,\dots}$ ciągu (a_n) . (To proste; jako a_{n_1} bierzemy najmniejszy wyraz ciągu (a_n) , jako a_{n_2} – najmniejszy wyraz ciągu $(a_{n_1+j})_{j=1,2,\dots}$, itd.) Następnie znajdziemy taki numer n_m , żeby b_{n_m} było najmniejszym wyrazem ciągu $(b_{n_k})_{k=1,2,\dots}$.

Jeśli teraz położymy $i = n_m$, $j = n_{m+1}$, to, oczywiście, warunki zadania będą spełnione.

Przyspieszenie ziemskie

Czy w miarę zjeżdżania w głąb kopalni czulibyśmy grawitację rosnącą czy malejącą? Przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni kuli o promieniu r i masie $M(r)$ wynosi, jak wiadomo, $g = GM(r)/r^2$. Uwaga: masa leżąca w kulistej warstwie „ponad” obserwatorem nie wywiera na niego żadnego działania! Wynik eksperymentu nie jest więc oczywisty, ponieważ z jednej strony w miarę zjeżdżania do kopalni obserwator zbliżałby się do gęstego jądra Ziemi i powinien odczuwać ciężenie coraz większe (maleje r), z drugiej jednak strony pod takim obserwatorem pozostawałoby coraz mniej masy Ziemi (maleje $M(r)$), więc może ciężenie powinno maleć. Wszystko zatem zależy od rozkładu gęstości materii w Ziemi. Zgodnie z obecnym modelem Ziemi na głębokości 2900 km występuje skok gęstości z 5,7 na 9,6 g/cm³ i obliczenia dowodzą, że do tej głębokości ciężenie rosłoby. Inaczej mówiąc, na mniejszych głębokościach w miarę zagłębiania się do kopalni odczuwalibyśmy dominujący efekt zbliżania się do jądra Ziemi (ponieważ warstwy zewnętrzne mają stosunkowo małą gęstość); dopiero głęboko przeważałby efekt drugi, tj. ubywania masy efektywnie przyciągającej obserwatora.

T. K.

Siodło

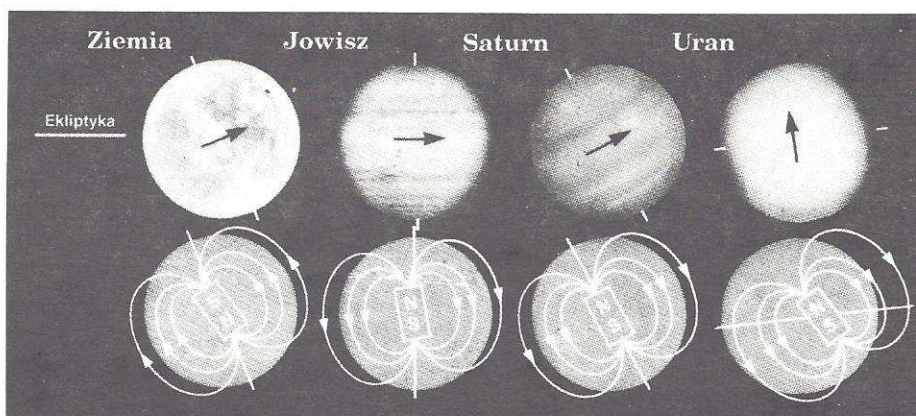
Na dobrym siodle do konnej jazdy można położyć prostą. Siodło bowiem ma (a przynajmniej powinno mieć) kształt, który w matematyce nazywa się paraboloidą hiperboliczną. Można go otrzymać tak: po dwóch nieruchomych prostych skośnych suwamy trzecią, stale równoległą do pewnej płaszczyzny. Brzmi to zawile, ale da się zrealizować, np. tak: wtykamy w ziemię pod tym samym kątem dwa patyki tak, by odpowiadały prostym skośnym i suwamy po nich trzecim patykiem, stale poziomym. Zakreśli on w przestrzeni właśnie kształt siodła. Ciekawe, że ten sam kształt można uzyskać suwając po paraboli mającej nogi w górze parabolą mającą nogi w dół i leżącą w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny pierwszej paraboli.

M. K.

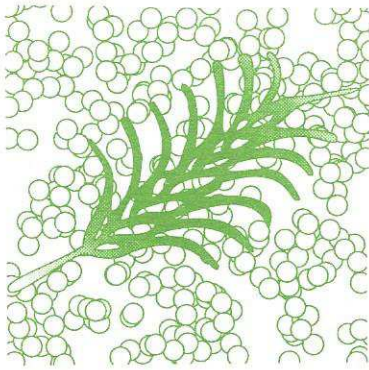
P.S. Dach przystanku PKP Ochota w Warszawie ma taki właśnie kształt.

Kompas na planetach

Jaki kierunek pokazywałby kompas na powierzchni innych planet? Prawdę mówiąc, nawet w przypadku Ziemi jest to trochę skomplikowane. Tzw. północny biegun igły magnetycznej wskazuje na Ziemi w przybliżeniu północny biegun geograficzny, ale dlatego, że tam znajduje się południowy biegun magnetyczny. Na Jowiszu i Saturnie północny biegun magnetyczny jest przy północnym biegunie geograficznym, zatem nasz kompas pokazywałby tam akurat południe. Wreszcie na Uranie sprawa jest najbardziej skomplikowana. Przede wszystkim biegun, na którym obserwator obracałby się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a więc w zasadzie północny, wypada w ujemnej szerokości ekliptycznej. Może więc powinien nazywać się biegunem południowym? A wewnętrzny magnes Urana jest bardzo „nieporządnie” umieszczony w planecie i wyjaśnić to może chyba tylko rysunek.



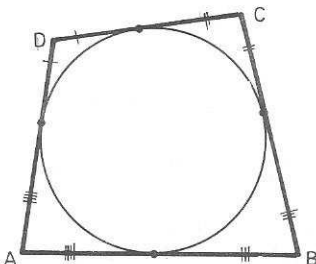
T. K.



Atmosfera ziemiska

Temperatura w ziemskiej atmosferze zależy od wysokości w sposób dosyć skomplikowany. W warstwach najniższych obserwujemy spadek temperatury ze wzrostem wysokości i to jest chyba zrozumiałe. Powietrze bowiem ogrzewa się od gruntu ziemskiego (nie od promieniowania słonecznego, ponieważ jest prawie przezroczyste), ogrzane masy powietrza unoszą się ku górze i tam ochładzają się wskutek rozprężenia. Ochładzanie to jest rzędu dziesięciu stopni na kilometr. Nic więc dziwnego, że w górach jest zawsze zimno. Tak zachowuje się atmosfera do wysokości około 12 km, a warstwa ta to troposfera. A dlaczego wyżej jest inaczej, czyżby prawa gazowe tam nie obowiązywały? Otóż, powyżej 12 km rozpościera się w atmosferze warstwa ozonu, który dość skutecznie absorbuje nadfioletowe promieniowanie słoneczne, a zatem cała ta warstwa (stratosfera sięgająca 50 km) musi być gorętsza. Od niej z kolei ogrzewają się warstwy jeszcze wyższe, dlatego w mezosferze znowu temperatura spada ze wzrostem wysokości. Wzrost temperatury w jonosferze jest spowodowany przez oddziaływanie gazów atmosferycznych z szybkimi cząstkami pochodzenia kosmicznego. Zresztą wskutek bardzo niskiej gęstości atmosfery pojęcie temperatury traci już tam sens.

T. K.



Rys. 1

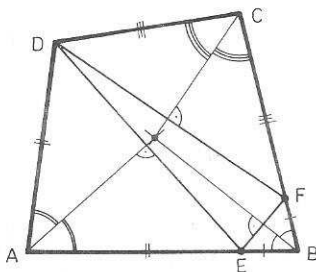
Czworokąt i okrąg

Uczniom szkół średnich dość dobrze znane jest twierdzenie:

Następujące dwa warunki są równoważne:

- 1) w czworokąt wypukły $ABCD$ da się wpisać okrąg,
- 2) $AB + CD = BC + AD$.

Dowód implikacji $1 \Rightarrow 2$ jest z grubsza widoczny na rysunku 1. Twierdzenie $2 \Rightarrow 1$ dowodzi się zazwyczaj nie wprost wykorzystując po drodze fakt $1 \Rightarrow 2$. Istnieje jednak dowód wprost twierdzenia $2 \Rightarrow 1$, którego szkic chciałbym tutaj przytoczyć.



Rys. 2

W tym celu wykazemy, że dwusieczne pewnych trzech kątów czworokąta $ABCD$ przecinają się w jednym punkcie (będzie to właśnie środek okręgu wpisanego). Na bokach AB i BC obierzmy odpowiednio punkty E i F tak, aby $AD = AE$ i $CD = CF$ (rys. 2). Wtedy na mocy równości $AB + CD = AD + BC$ otrzymujemy $BE = BF$. Zatem trójkąty ADE , BEF , FCD są równoramienne. Dwusieczne kątów DAB , ABC , BCD są symetralnymi boków trójkąta DEF , a to znaczy, że przecinają się w jednym punkcie.

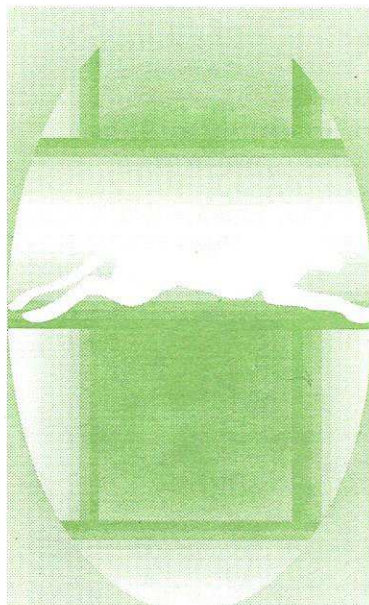
Powyższe rozumowanie zawiera jednak małą lukę, którą uważny Czytelnik z pewnością dostrzeże. Jaką?

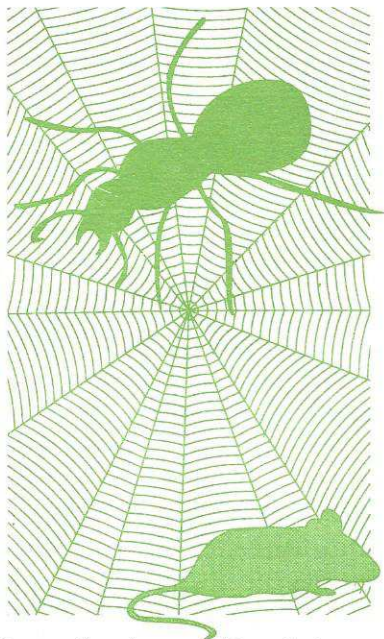
W. P.

Obrazy gwiazd

Gwiazdy widoczne w większym teleskopie są mniejsze. Miarą „wielkości” teleskopu jest jego średnica, a nie, na przykład, powiększenie, ono bowiem jest w ogóle nie ustalone – zależy od zastosowanego okularu. Gwiazdy są tak odległe, że ich obrazy w ognisku obiektywu nie mają nic wspólnego z rzeczywistymi kątowymi rozmiarami gwiazd. Rozmiar „punktowego” obrazu gwiazdy jest efektem uginania się fal świetlnych na brzegach obiektywu (dyfrakcji), przy czym im większy jest obiektyw, tym mniejszą średnicę ma ten obraz. Inaczej mówiąc, większy obiektyw daje ostrzejszy obraz. Ale tak jest dopóty, dopóki jakość obrazu zależy od falowej natury światła. W rzeczywistości przedstawiona tu prawidłowość można zauważyć bardzo rzadko, gdyż zazwyczaj zakłóca ją atmosfera. Mianowicie przed obiektywem nieustannie przesuwają się niejednorodności atmosfery, których rozmiar jest rzędu metra. Wskutek tego wpadająca do małego teleskopu wiązka światła stale lekko zmienia kierunek i obserwator widzi w okularze obraz gwiazdy wprawdzie ostry, lecz ciągle wędrujący. Gdy obiektyw jest duży, chwyta on naraz wiele wiązek światła o różnych kierunkach i w jego ognisku powstaje obraz gwiazdy pochodzący od wszystkich wiązek, czyli po prostu nieostry. W sumie większy teleskop daje w tej sytuacji większy obraz. Zjawisko takie to tzw. seeing.

T. K.



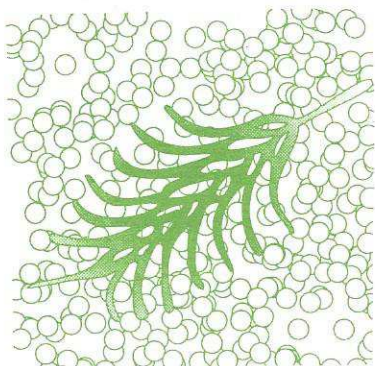


Przypuśćmy, że ustawiliśmy liczby rzeczywiste z odcinka $[0, 1]$ w ciąg. Wypiszmy jedno pod drugim nieskończone rozwinięcia dziesiętne tych liczb – jeśli jakaś liczba ma dwa takie rozwinięcia, to wypisujemy oba.

0,	a_1	a_2	a_3	a_4	...
0,	b_1	b_2	b_3	b_4	...
0,	c_1	c_2	c_3	c_4	...
0,	d_1	d_2	d_3	d_4	...

Teraz weźmy liczbę z $[0, 1]$, która na pierwszym miejscu po przecinku ma cyfrę różną od a_1 , na drugim od b_2 , na trzecim od c_3 , na czwartym od d_4 itd. Łatwo zauważyć, że wskazana przez nas liczba nie występuje w powyższym ciągu. Sprzeczność.

Merkury	6 023 600
Wenus	408 523
Ziemia	328 900
Mars	3 098 710
Jowisz	1 047
Saturn	3 499
Uran	22 869
Neptun	19 314
Pluton	3 000 000



Ustawić w ciąg

Czy liczby wymierne z odcinka $[0, 1]$ można ustawić w ciąg? Tak. Proszę bardzo

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Wypisujemy po kolei wszystkie liczby z mianownikami 2,3,4,5,6,... Oczywiście, w tym ciągu niektóre liczby powtarzają się, np. $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{4}$. Teraz wystarczy wyrzucić powtarzające się wyrazy (zostawiając po jednym). To, co zostanie, to będą wszystkie liczby wymierne z odcinka $[0, 1]$ i, oczywiście, będą one ustawione w ciąg.

No to może uda nam się teraz ustawić w ciąg wszystkie liczby rzeczywiste z odcinka $[0, 1]$? Nic z tego. Nie uda się. Pierwszy zauważył to Georg Cantor. Przypuśćmy bowiem, że ustawiliśmy wszystkie te liczby rzeczywiste w ciąg.

Weźmy odcinek o długości $\frac{1}{10^n}$ i przykryjmy nim n -tą w tym ciągu liczbę rzeczywistą, to znaczy połączmy go na odcinku $[0, 1]$ tak, aby nasza n -ta liczba rzeczywista znalazła się w środku. Zróbmy tak z każdą liczbą rzeczywistą. Naszymi odcinekami pokryliśmy cały odcinek $[0, 1]$, a nawet trochę więcej (bo niektóre z odcineków wystają poza 0 i 1). Wobec tego łączna ich długość większa jest niż 1. Z drugiej zaś strony łączna długość naszych odcineków równa jest

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots = 0,1111\dots < 0,2,$$

a więc mniej niż 1. Otrzymaliśmy sprzeczność. Oznacza to, że liczb rzeczywistych z odcinka $[0, 1]$ nie można ustawić w ciąg. Ale zaraz, zaraz. Czy nasz dowód jest w pełni poprawny? Czy argument, że jeśli pokryjemy odcinek $[0, 1]$ odcinkami nieco więcej niż odcinek $[0, 1]$, to ich łączna długość jest większa od 1, jest ścisły? Tak jest, oczywiście, jeśli pokrywamy skończoną liczbą odcinków, lecz tutaj mamy ich nieskończenie wiele.

Można udowodnić (pozostawiamy to Czytelnikom znającym granice ciągów), że z każdego pokrycia odcinka $[0, 1]$ odcinkami otwartymi można wybrać skończoną liczbę odcinków, które już pokrywają cały odcinek $[0, 1]$. Korzystając z tego faktu widzimy, że powyższy dowód jest w pełni poprawny.

Na marginesie przytaczamy oryginalny dowód Cantora.

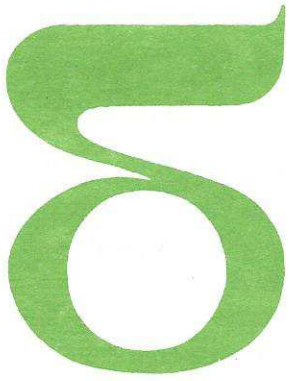
P. H.

Moment pędu planet

W tablicach astronomicznych masy planet podawane są z reguły nie wprost, lecz jako liczby oznaczające stosunek masy Słońca do masy planety. Dane przytaczamy na marginesie.

Jako ćwiczenie rachunkowe każdy może sobie obliczyć łączny moment pędu wszystkich planet, tj. sumę wyrażenia mvr , przy czym odległość r można znaleźć w licznych tablicach, a prędkości v też lub obliczyć samemu. Na przykład, dla Jowisza powinna wyjść liczba rzędu 10^{43} w jednostkach MKS. Dużo to czy mało? Najlepiej porównać to z obrotowym momentem pędu Słońca, trzeba jednak przyjąć jakiś jego model. Przyjmijmy więc, że moment bezwładności Słońca wynosi, jak dla jednorodnej kuli, $\frac{2}{5}MR^2$ (M i R to masa i promień Słońca). Prędkość kątową Słońca znamy z obserwacji i wynosi ona w przybliżeniu 2π rad/25 dni = $2,9 \times 10^{-6}$ rad/s. Łatwo się już teraz przekonać, że orbitalny moment pędu samego Jowisza o rząd wielkości przekracza moment pędu Słońca. Rzeczywistość jest dla Słońca jeszcze bardziej niekorzystna (zawyżyliśmy tu jego moment bezwładności): zawiera ono zaledwie 2% momentu pędu całego Układu Słonecznego. Przypuszcza się, że w początkowym etapie powstawania naszego układu planetarnego uformowane już i szybko wirujące Słońce przekazało część swojego momentu obrotowego otaczającej je, jeszcze gorącej, mgławicy za pośrednictwem pola magnetycznego.

T. K.

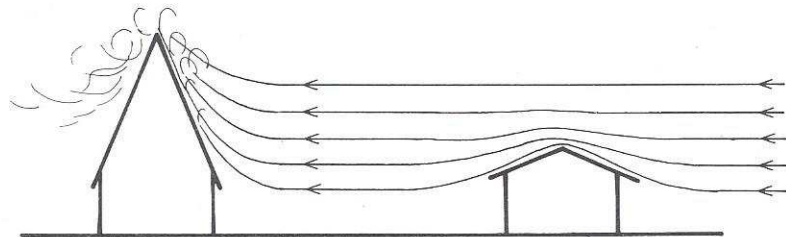
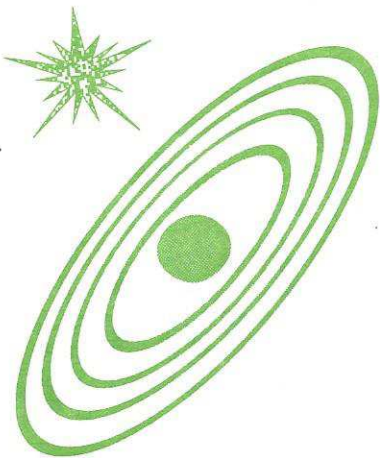


mata delta

O spadzistych dachach i 'oblych kształtach

Jak powszechnie wiadomo, górale zwykli budować domy o wysokich, spadzistych dachach, podczas gdy na nizinach spotyka się dachy raczej płaskie. Na pierwszy rzut oka takie postępowanie górali wygląda nierozsądnie, gdyż wysokie dachy zdają się być mniej odporne na uderzenia wiatru, które w górach są szczególnie silne. W rzeczywistości to płaskie dachy są mniej wytrzymałe.

Przepływ powietrza nad dachem płaskim ma zwykle charakter laminarny, podczas gdy nad dachem spadzistym jest turbulentny (rys. 1). Mówiąc najprościej, podczas przepływu laminarnego masy gazu czy cieczy przemieszczają się spokojnie wzdłuż gładkich krzywych. Przepływ turbulentny natomiast jest niespokojny, chaotyczny, pełen zawirowań.



Rys. 1a

Rys. 1b

Dlaczego przepływ turbulentny ma być mniej groźny dla dachu niż laminarny? Rozważmy sytuację przedstawioną na rysunku 1b. Aby taka sama ilość powietrza przepływała w jednostce czasu nad szczytem dachu, jak i nad jego brzegiem, prędkość powietrza nad szczytem, gdzie widzimy zagęszczenie linii wiatru, musi być większa niż nad brzegiem. Prawo Bernoulliego orzeka zaś, że wielkość $\rho \frac{v^2}{2} + p$, gdzie ρ jest gęstością gazu, v jego prędkością, a p ciśnieniem, pozostaje stała. A zatem, tam, gdzie przepływ odbywa się szybciej, następuje obniżenie ciśnienia. Widzimy więc, że na dach, podobnie jak na skrzydło samolotu, działa siła skierowana ku górze. To ona właśnie, nie mogąc podnieść całego domu, odrywa i demoluje dach.

W przypadku przepływu turbulentnego nad dachem spadzistym (rys. 1a) pole prędkości wiatru jest nader skomplikowane i obszary z różnymi prędkościami są poprzeplatane. A zatem, nie mamy dużego obszaru o obniżonym ciśnieniu i odpowiedniej sile nośnej, jak to było dla dachu płaskiego.

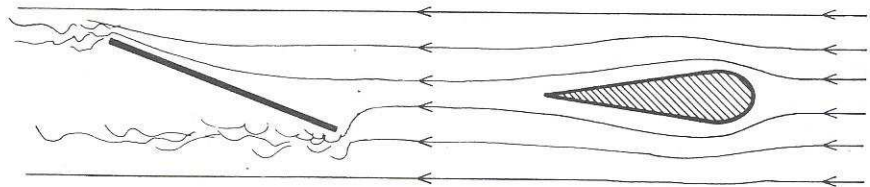
Turbulentność przepływu zapewnia stabilność spadzistym dachom. Bywa jednak i tak, że przepływ laminarny jest bardziej pożądany.

Mogłoby się wydawać, że przy ruchu w wodzie czy powietrzu należy minimalizować powierzchnię poprzeczną do kierunku ruchu obiektu poruszającego się, tak aby był najmniejszy opór ośrodka. Jest to nie cała prawda. Wielokrotnie ważniejsze okazuje się zachowanie gładkości, obłości kształtu poruszającego się obiektu. Wygląd szybkich samochodów czy podwodnych części statków jasno to pokazuje (rys. 2).



Rys. 2. Schematyczny rysunek dziobu statku.

Gdy płaski przedmiot porusza się w wodzie wzdłuż płaszczyzny, w której jego grubość jest znikoma, to opór wody jest rzeczywiście niewielki. Jeśli jednak płaszczyzna ta nie pokrywa się z kierunkiem ruchu, to przepływ cieczy za przedmiotem staje się turbulentny (rys. 3a) i opór gwałtownie wzrasta.



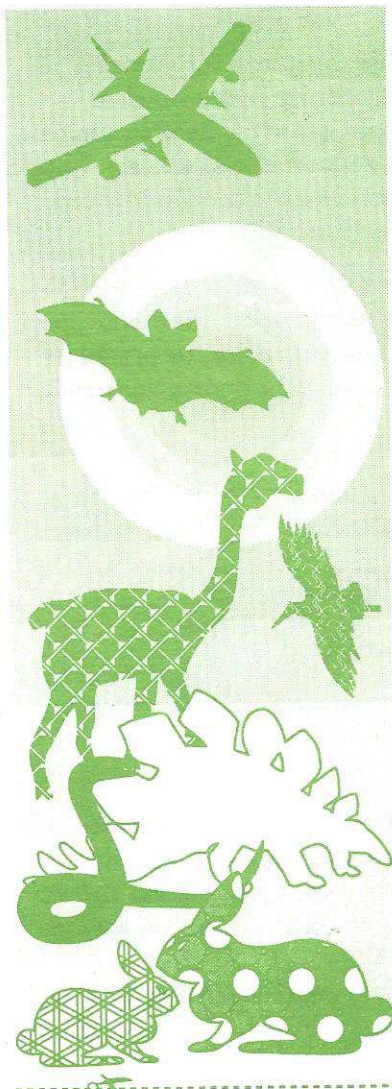
Rys. 3a

Rys. 3b

Ponieważ ruch samochodu czy statku nie odbywa się przez cały czas w kierunku, w którym ich przekrój poprzeczny jest najmniejszy, więc dba się nie tyle o minimalizację przekroju, lecz o to, by przepływ był laminarny. I dlatego płaski przedmiot z rysunku 3a zamienia się często na obły z rysunku 3b.

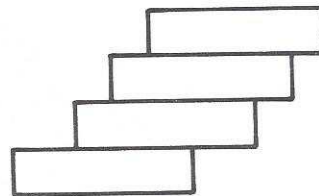
Małą Deltę przygotował Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Odcinek dla poczty		Odcinek dla posiadacza rachunku		Potwierdzenie dla wpłacającego	
Zł	Zł	Zł	Zł	Zł	Zł
słownie złotych		słownie złotych		słownie złotych	
Dokładny adres wpłacający		Dokładny adres wpłacający		Dokładny adres wpłacający	
na r-k	na r-k	na r-k	na r-k	na r-k	na r-k
AMOS		AMOS		AMOS	
01-506 Warszawa		01-506 Warszawa		01-506 Warszawa	
ul. Szenwalda 1		ul. Szenwalda 1		ul. Szenwalda 1	
nazwa banku PKO VIII O/W-wa		nazwa banku PKO VIII O/W-wa		nazwa banku PKO VIII O/W-wa	
Nr r-ku 1586-77578-136		Nr r-ku 1586-77578-136		Nr r-ku 1586-77578-136	
stempel	Pobrano opłatę	stempel	Pobrano opłatę	stempel	Pobrano opłatę
..... podpis przyjmującego	zł podpis przyjmującego	zł podpis przyjmującego	zł



Cegły

Mamy nieograniczony zapas jednakowych cegieł. Kładziemy je jedną na drugiej przesuwając kolejnie nieco w prawo. Jak daleko w prawo możemy się posunąć?

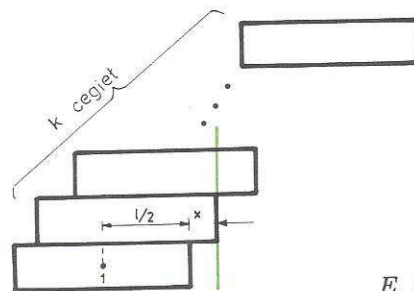


Okazuje się, że dowolnie. By się o tym przekonać, lepiej jest podkładać cegły pod już zbudowaną piramidę. Drugą cegłę podkładamy pod pierwszą tak, aby środek ciężkości pierwszej znalazł się na prawym brzegu drugiej (a więc w środku pierwszej). Następnie pod te dwie podkładamy trzecią tak, by jej prawy brzeg znalazł się w środku ciężkości pierwszych dwóch itd. Jeśli cegły mają długość l , to pierwsza będzie przesunięta w stosunku do drugiej o $l/2$ w prawo i, jak zaraz udowodnimy, druga w stosunku do trzeciej o $l/4$, k -ta w stosunku do $(k+1)$ -szej o $l/2k$. W efekcie piramida będzie przesunięta w prawo po położeniu n cegieł o $\frac{l}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$. Przesunięcie

to może być dowolnie duże, gdyż suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżna. I tak np. już dla czterech cegieł górna będzie przesunięta w prawo więcej niż o l , a więc wyjdzie całkiem poza podstawę. A dla ilu cegieł górna będzie przesunięta w prawo więcej niż o dwie swoje długości? (Odpowiedź na str. 12.)

Pozostał do uzasadnienia wzór na przesunięcie k -tej cegły w stosunku do $(k+1)$ -szej.

Skorzystamy z oznaczeń wprowadzonych na rysunku. Środek ciężkości układu k górnych cegieł znajduje się, zgodnie z założeniem, na linii kolorowej. Odpowiada on masie k (cegieł). Chcemy, aby środek ciężkości układu $(k+1)$ -szej był na krawędzi $(k+1)$ -szej. Mamy więc $\frac{l}{2} \cdot 1 = x \cdot k$, skąd $x = \frac{l}{2k}$, a to mieliśmy wykazać.



E. P.

Prenumerata „Delfy”
za okres:

Prenumerata „Delfy”
za okres:

Prenumerata „Delfy”
za okres:

delfy

delfy

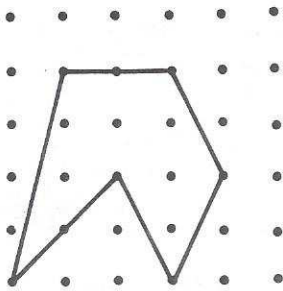
delfy

Twierdzenie Picka

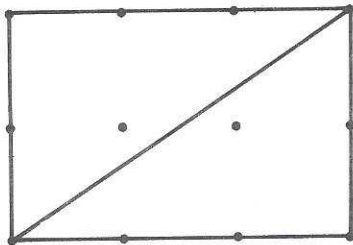
Punktami kratowymi na płaszczyźnie nazywamy punkty o obu współrzędnych całkowitych. Twierdzenie Picka daje prostą formułę obliczania pól wielokątów, których wierzchołki położone są w punktach kratowych (dalej wielokąty takie nazywamy kratowymi). Pole to jest równe

$$w + \frac{1}{2}b - 1,$$

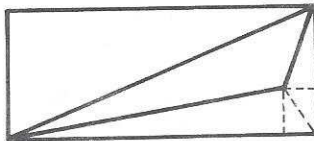
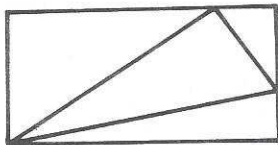
gdzie w oznacza liczbę punktów kratowych leżących wewnątrz wielokąta, a b – liczbę punktów kratowych leżących na jego brzegu. Uzasadnienie tej formuły podzielimy na kilka części.



Rys. 1. Pole = $6 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = 9$.



Rys. 2.



Rys. 3.

1. Załóżmy, że wielokąt kratowy został podzielony odcinkiem o końcach w punktach kratowych, leżącym wewnątrz wielokąta, na dwa mniejsze wielokąty.

Niech liczby punktów kratowych, leżących wewnątrz dużego wielokąta i wielokątów mniejszych, będą odpowiednio równe w, w_1, w_2 , punktów zaś brzegowych b, b_1, b_2 . Załóżmy, że na odcinku dzielącym znajduje się poza końcami x punktów kratowych. Wówczas $w + \frac{1}{2}b - 1 = (w_1 + w_2 + x) + (\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 - x - 1) - 1 = w_1 + \frac{1}{2}b_1 - 1 + w_2 + \frac{1}{2}b_2 - 1$. Z zależności tej wynika, że jeśli formuła jest prawdziwa dla dwóch z tych trzech wielokątów (dwóch mniejszych lub większego i jednego z mniejszych), to i dla trzeciego.

2. Prostokąt kratowy o bokach długości m, n równoległych do osi zawiera wewnątrz $w = (m - 1)(n - 1)$ punktów kratowych i na brzegu $b = 2m + 2n$ takich punktów. Zatem $w + \frac{1}{2}b - 1 = mn$, a więc formuła jest prawdziwa dla takich prostokątów.

3. Trójkąt kratowy prostokątny o przyprostokątnych równoległych do osi jest połową pewnego prostokąta kratowego o bokach równoległych do osi (rys. 2). Formuła dla takich trójkątów wynika więc z 1 i 2.

4. Dowolny trójkąt kratowy można uzyskać usuwając z pewnego prostokąta kratowego o bokach równoległych do osi kilka trójkątów kratowych prostokątnych o przyprostokątnych równoległych do osi. Jak to można zrobić, pokazujemy na rysunku 3. Formułę dla takich trójkątów otrzymuje się więc z 1-3.

5. Dowolny wielokąt kratowy można podzielić na trójkąty kratowe. Następnie wystarczy zastosować 1 i 4.

E. P.



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 664. Wewnątrz kwadratu o boku 1 danych jest dziewięć różnych punktów. Udowodnić, że wśród wszystkich trójkątów o wierzchołkach w tych punktach istnieje przynajmniej jeden mający pole mniejsze od $1/8$.

Rozwiązanie na str. 5

M 665. Dla danego $n \in \mathbb{N}$ znaleźć największe $k \in \mathbb{N}$ o własności: w zbiorze n -elementowym można wybrać k podzbiorów o parami niepustych przecięciach.

Rozwiązanie na str. 5

M 666. Dane są dwa nieskończone ciągi liczb naturalnych (a_n) oraz (b_n) . Wykazać, że istnieją takie $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$, dla których jednocześnie $a_i \leq a_j$ oraz $b_i \leq b_j$.

Rozwiązanie na str. 5

Redaguje Jarosław KULPA

F 355. Oszacować, jakie ciśnienie panuje na szczycie Mount Everest ($H = 8848$ m n.p.m.). Przyjąć, że ciśnienie na poziomie morza jest równe ciśnieniu normalnemu $p_0 = 101325$ Pa, masa molowa powietrza wynosi $\mu = 0,029$ kg/mol, temperatura na poziomie morza wynosi 15°C i maleje wraz z wysokością. Gradient temperatury wynosi $a = 6,5^\circ\text{C}/\text{km}$.

Rozwiązanie na str. 12

F 356. Meteoryt o gęstości trzykrotnie większej od gęstości wody wpadł do oceanu. Obliczyć, ile razy prędkość meteorytu w powietrzu była większa od jego prędkości w wodzie po wyhamowaniu. Gęstość powietrza wynosi $\rho_p = 1,3$ kg/m³, gęstość wody $\rho_w = 1000$ kg/m³.

Rozwiązanie na str. 12



Rozwiązanie zadania F 355.

Zmianę ciśnienia hydrostatycznego możemy zapisać w postaci $dp = \rho g dh$, gdzie ρ oznacza gęstość powietrza, a g – przyspieszenie ziemskie. Gęstość powietrza możemy wyznaczyć z równania stanu gazu doskonałego $pV = \frac{m}{\mu} RT$. Uwzględniając, że $\rho = \frac{m}{V}$ znajdujemy $\rho = \frac{p\mu}{RT}$. Temperatura zmienia się wraz z wysokością h według wzoru $T = T_1 - ah$, gdzie $T_1 = 288$ K. Podstawiając powyższe zależności do wzoru na zmianę ciśnienia otrzymujemy równanie $\frac{dp}{p} = \frac{\mu g dh}{R(T_1 - ah)}$, które możemy obustronnie scałkować. Uwzględniając, że $p(h=0) = p_0$, dostajemy $\ln \frac{p}{p_0} = \frac{\mu g}{aR} \ln \left(1 - \frac{aH}{T_1}\right)$, skąd po przekształceniu otrzymujemy ostateczną postać

$$p = p_0 \left(1 - \frac{aH}{T_1}\right)^{\frac{\mu g}{aR}}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy

$$p \approx 31000 \text{ Pa.}$$



Rozwiązanie zadania F 356. Niech v_p i v_w oznaczają prędkości meteorytu odpowiednio w powietrzu i w wodzie, $k = 3$ zaś niech oznacza stosunek gęstości meteorytu i wody. Siła oporu powietrza równoważy siłę ciężkości: $mg = C v_p^2 \rho_p$, gdzie C – stała zależna od kształtu meteorytu. W wodzie oprócz tego istotną staje się siła wyporu równa ciężarowi wypartej cieczy $m_w g$, więc

$$mg - m_w g = C v_w^2 \rho_w.$$

Dzieląc dwa równania stronami i podstawiając $\frac{m}{m_w} = k$ dostajemy

$$1 - \frac{1}{k} = \frac{v_w^2 \rho_w}{v_p^2 \rho_p}.$$

Stąd

$$\frac{v_p}{v_w} = \sqrt{\frac{k}{k-1} \frac{\rho_w}{\rho_p}} \approx 34 \text{ razy.}$$

Dla 31 cegieł.

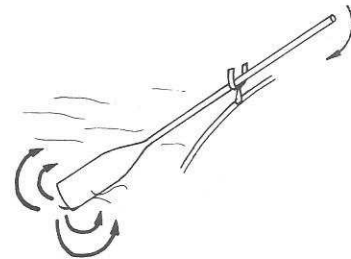
Lecą żurawie

Już wiosna, żurawie wracają z ciepłych krajów. Każdy z nas widział zapewne stado lecących żurawi. W czasie lotu formują one charakterystyczną figurę w kształcie litery V.

Czy jest w tym jakaś przyczyna fizyczna, czy tylko takie „upodobanie” żurawi? Jeśli jest w tym istotna przyczyna, to możemy zastanowić się dodatkowo, czy powinna to być figura symetryczna, czy istotne jest zsynchronizowanie uderzeń skrzydłami żurawi itp.

Żurawie uderzają skrzydłami w powietrze ruchem skrzydeł w dół, aby utrzymać się w powietrzu.

Żeby zrozumieć, co się wtedy dzieje, przypomnijmy sobie obraz powierzchni wody uderzonej wiosłem w czasie wiosłowania. Po obu stronach wiosła tworzą się zawirowania wody, tak jak pokazane jest na rysunku. Woda na zewnątrz porusza się w kierunku przeciwnym do ruchu wiosła.



Podobnie dzieje się z powietrzem uderzonym przez skrzydła żurawia.

Po obu stronach skrzydeł tworzą się zawirowania powietrza i są miejsca, gdzie powietrze wznosi się do góry.



Celem formacji V jest takie ustawienie następnego żurawia, aby wykorzystywał on pęd wznoszącego się powietrza. W ten sposób wszystkie żurawie, z wyjątkiem tego na czele, mogą zaoszczędzić trochę energii.

J. K.

Na odwrót

Dla rozwoju nauki niezbędny jest m.in. „język”, którym porozumiewaliby się wszyscy uprawiający daną dziedzinę. W tym celu zawiera się pewne umowy dotyczące nazewnictwa i terminologii, sposobów wykonywania obserwacji, konstruowania wzorców mierzonych wielkości itd. Jest to naturalne i pożyteczne – dlatego więc niektóre umowy w astronomii wyglądają opacznie? Na przykład dlaczego azymut mierzy się od południa, a nie od północy jak w nawigacji, wojsku, harcerstwie? Tu usprawiedliwieniem jest pewna wygoda. Mianowicie z obszaru Europy, gdzie astronomia powstała, większość obserwacji prowadzi się w kierunku południowym, gdyż tam widać „większość” nieba. Prościej jest zatem, gdy azymuty na ogół wyrażają się małymi liczbami. Drugi przykład to tzw. juliańska rachuba dni. Uwaga: nie ma ona nic wspólnego z kalendarzem juliańskim! Sprowadza się ona do przyporządkowania każdej dobie kolejnego numeru (by łatwo było operować dużymi interwałami czasu) poczynając od 1 I 4713 r.p.n.e. Mniejsza z tym, od którego roku – istotne jest, że zero rachuby ustawiono na południe czasu Greenwich tej właśnie daty początkowej, też dla wygody. Mianowicie przy takiej umowie prowadząc obserwacje w tejże Europie nie trzeba zmieniać daty (juliańskiej) w środku nocy. Mamy też umowę, że im słabsza jest gwiazda, tym większą liczbą określa się jej jasność. To akurat jest skutkiem tradycji. Starożytni astronomowie przyjęli mianowicie, że najjaśniejsze gwiazdy nieba nazwiemy gwiazdami pierwszej wielkości a najślabsze (widoczne gołym okiem, bo teleskopów wtedy nie było) szóstą wielkości. I tak już zostało, a umowa została rozciągnięta konsekwentnie także na obiekty gołym okiem niewidoczne. A dlaczego barwa niebieska jest określana jako zimna, czerwona zaś jako ciepła? Przecież maksimum energii w zakresie niebieskim wyświeca ciało gorętsze niż mające maksimum w zakresie czerwonym!

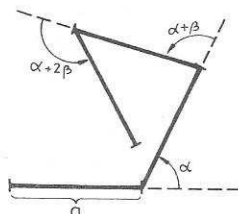
T. K.

Łamane spiralne

W 1991 roku pani Małgorzata Sęk zdobyła brązowy medal w Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki. Opowiemy tu, o czym była ta praca, gdyż wydaje się, że temat jest bardzo ciekawy i daje duże możliwości własnych badań.

Ustalmy długość odcinka a oraz dwa kąty α i β . Łamana spiralna jest to łamana otrzymana w sposób następujący.

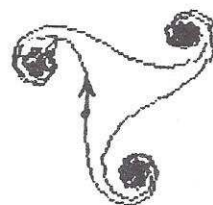
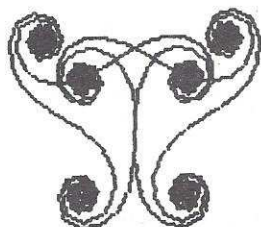
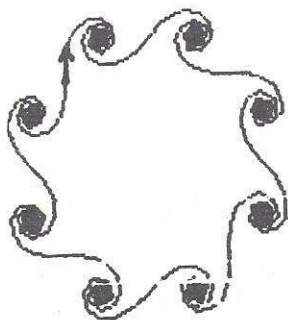
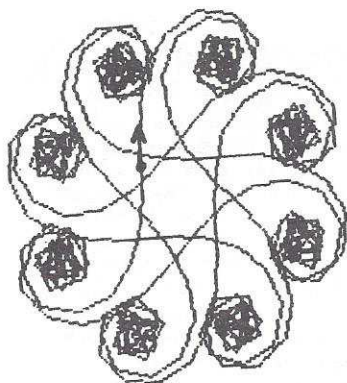
Rysujemy odcinek o długości a . Z końca tego odcinka rysujemy pod kątem α drugi odcinek o długości a . Z końca tego odcinka rysujemy pod kątem $\alpha + \beta$ trzeci odcinek o długości a . Kolejne odcinki rysujemy pod kątami $\alpha + 2\beta$, $\alpha + 3\beta, \dots, \alpha + k\beta, \dots$



Taką procedurę rysowania bardzo wygodnie zapisuje się w języku LOGO.

Okazuje się, że przy podawaniu różnych wartości a , α i β otrzymywane łamane czasami mają identyczny kształt, a czasami bardzo różne kształty.

Pani Małgorzata Sęk badała, w jaki sposób kształt tych łamanych zależy od a , α i β . Zmiana parametru a wpływa jedynie na zmianę wielkości łamanej, natomiast kształt pozostaje niezmienny. Dlatego istotne jest jedynie badanie wyglądu łamanej w zależności od α i β . A oto kilka przykładów łamanych spiralnych.



Wiele pytań w tej pracy pozostało bez odpowiedzi. Można, oczywiście, wymyślać bardzo wiele podobnych procedur graficznych i zajmować się badaniem otrzymywanych rysunków. Jest to cała grupa tematów na Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki. Problem wydaje się ważny ze względu na wzrost zainteresowania komputerami.

P. H.

Kule w sześciacie

Jaką część objętości sześciangu zajmuje wpisana w niego kula? Obliczyć to można łatwo, jednak gdy poprosi się kogoś, by szybko zgadł (by odpowiedział szybciej niż pomyśli), to odpowiedź może być bardzo odległa od prawdy. Jest to bowiem

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{(2r)^3} = \frac{\pi}{6} \approx 52,3\%.$$

Niewiele ponad połowę. A jaką część objętości sześciangu może wypełnić drobny, ale złożony z jednakowych kuleczek, śrut? Jest to już znacznie więcej, ale mniej niż

$$\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 74\%.$$

Tak więc jednakowe kule nie są w stanie (niezależnie od rozmiarów) wypełnić nawet $\frac{3}{4}$ objętości sześciangu.

M. K.