

Światło – piąty żywioł

Aleksandra KOPYSTYŃSKA

Ciśnienie światła

Można zaryzykować stwierdzenie, że zjawisko ciśnienia światła było już obserwowane w starożytności, gdy tylko uczeni zauważyli na niebie komety.

Komety wyglądają różnie, ale zawsze mają jądro (o średnicy od 800 do 3000 km), głowę (o średnicy od 50 do 240 tysięcy km) i wypływający z niej warkocz, nazywany też ogonem. Warkocz, który jest zbiorem jonów cząsteczkowych, ciągnie się na długości dochodzącej do 80 milionów km i jest skierowany od Słońca, chociaż czasami może być odchyłony od kierunku radialnego. Na cząsteczki w ogonie komety działają dwie antyrównoległe siły. Jedną jest siłą grawitacji Słońca, a drugą jest wywołana ciśnieniem światła, co zrozumiano dosyć późno, bo dopiero na początku naszego stulecia. Widząc więc na niebie komety obserwujemy „doświadczenie kosmiczne”, które demonstruje m.in. istnienie ciśnienia światła.

Aby bliżej zrozumieć, dlaczego światło wywiera ciśnienie, warto przypomnieć trochę podstawowych wiadomości z fizyki. I tak, drugą zasadę dynamiki Newtona można zapisać w postaci

$$(1) \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

gdzie $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ oznacza pęd ciała o masie m , które porusza się z prędkością \mathbf{v} . Zmiana pędu w czasie jest równa sile, która działa na ciało o masie m i nadaje mu przyspieszenie \mathbf{a} . Zatem w układzie, w którym nie działają siły zewnętrzne, suma pędów ciał jest stała

$$(2) \quad m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots = \text{const.}$$

Ale czy pęd można przypisać tylko cząstkom materialnym, czyli takim, które mają masę spoczynkową większą od zera? Otóż, nie tylko. To, że pole elektromagnetyczne powinno nieść zarówno energię, jak i pęd, wynikało już z opublikowanych w 1862 r. równań Maxwella.

Światło możemy traktować bądź jako falę elektromagnetyczną, bądź jako strumień fotonów o energii $E = \hbar\omega$ i pędzie $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, $|\mathbf{p}| = E/c$, gdzie \hbar jest stałą Plancka h dzieloną przez 2π , c prędkością światła w próżni, a \mathbf{k} wektorem falowym (zawsze równoległym do kierunku rozchodzenia się fali) o wartości $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$. Zgodnie z zasadą zachowania pędu

$$(3) \quad \hbar\mathbf{k} + m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v}_2$$

atom po absorpcji lub emisji fotonu musi doznać odrzutu $\mathbf{p} = m\Delta\mathbf{v}$, gdzie m jest jego masą, a $\Delta\mathbf{v}$ zmianą prędkości o wartości równej $\hbar\omega/mc$. Jak mała jest ta zmiana, niech świadczy przykład atomu sodu, który absorbując lub emitując foton promieniowania rezonansowego o długości fali $\lambda = 589$ nm, wskutek doznanego odrzutu zmienia prędkość o $\Delta v = 0,03$ m/s. Dla porównania, w temperaturze pokojowej w opróżnionej z powietrza komórce z metalicznym sodem prędkość atomów pary sodu wynosi około 460 m/s (≈ 1700 km/h).

Przeprowadzenie przekonującego doświadczenia, które wykazałoby istnienie ciśnienia światła, okazało się bardzo trudne. Pierwszą, niezbyt udaną próbę podjął w 1910 r. Piotr Lebediew w Rosji. Gdy światło pada na dowolne ciało, to w każdej sekundzie przekazuje

Anegdoty matematyczne

Steven KRANTZ

© The Mathematical Intelligencer
przedruk za zgodą redakcji

Tłumaczenie i skróty w tekście angielskim:
Paweł STRZELECKI

Bergman

Stefan Bergman (1898–1977) był rodowitym Polakiem. Swoją karierę w Stanach Zjednoczonych rozpoczął w Brown University. Mówi się, że Bergman przybył do Stanów razem ze swą kochanką. Wkrótce po przyjeździe wziął ją na stronę i powiedział „Jesteśmy teraz w Stanach Zjednoczonych, gdzie panują inne obyczaje. Kiedy jesteśmy z innymi ludźmi, zwracaj się do mnie Stefan. Ale w domu nadal tytułuj mnie: Profesorze Doktorze Bergman.” (...)

Bergman jąkał się i niekiedy trudno było go zrozumieć, niezależnie od tego, jakim językiem mówił. Pewnego razu rozmawiał z Antonim Zygmundem, innym sławnym polskim analitykiem, w ojczystym języku. Po chwili Zygmund powiedział „Proszę, rozmawiajmy po angielsku: tak mi będzie wygodniej.” (...)

Bergman był niezwykle miłym i uprzejmym człowiekiem. Nie zważając na kłopoty, pomagał wielu młodym ludziom rozpocząć kariery, czynił też wielkie wysiłki na rzecz polskich Żydów w okresie drugiej wojny światowej. Ale gdy przychodziło do *jego* własnej matematyki, objawiała się w nim dusza spryciarza. Gdy podobało mu się twierdzenie, będące przedmiotem czyjegoś wykładu, często podchodził do wykładowcy i mówił „Naprawdę podoba mi się Pańskie twierdzenie. Przypomina mi to moje własne badania nad jądrem (Bergmana – przyp. tłum.). Rozważmy dwuwymiarową przestrzeń zespoloną...” I Bergman wyłączał się, i wpadał na swój ulubiony temat. Zdarzyło się, że pewien młody matematyk dał Bergmanowi rękopis swej nowej pracy. Bergman rzecz przeczytał i stwierdził: „Podoba mi się Pana wynik. Zróbmy z niego wspólną pracę, a ja napiszę następną.” (...)

Bergman intensywnie myślał o matematyce i żarliwie troszczył się o swą pracę. Pewnego dnia, podczas Międzynarodowego Kongresu Matematycznego w 1950 roku w Cambridge (Mass.), umówił się na lunch z dwoma włoskimi przyjaciółmi. Obaj

pojawił się bardzo punktualnie w pokoju Bergmana: szacowny, starszy włoski matematyk Picone (niosący bukiet kwiatów dla Bergmana!) i jego młodszy kolega Sichera. Picone był w Stanach Zjednoczonych po raz pierwszy i nie mówił po angielsku; Sichera występował w roli tłumacza. Po przywitaniu Bergman zapytał Sichere, czy ten czytał jego najnowszą pracę. Sichera przyznał, że tak, i że uważa ją za bardzo interesującą; jednakże ma uczucie, że potrzebne są pewne dodatkowe założenia o różniczkowalności. Bergman stwierdził „Nie, nie, nie rozumie Pan” i zaczął wyjaśniać kwestię przy tablicy. Picone czekał cierpliwie nic nie rozumiejąc. Po wyjaśnieniach Bergman spytał Sichere, czy teraz już zrozumiał. Sichera odparł, że tak, ale nadal sądzi, że pewien krok dowodu wymaga założeń o różniczkowalności. Bergman pozostał nieugięty i wywiązał się gorący spór, z którego Picone nic nie rozumiał. Po pewnym czasie Sichera stwierdził „Dobrze, zapomnijmy o tym i chodźmy na lunch.” Bergman wykrzyknął „Nie ma różniczkowalności, nie będzie lunchu!” i został w swoim pokoju, a Włosi sami poszli na lunch. Picone wręczył bukiet kwiatów kelnerce.

Istnieje wiele dowodów na to, że Bergman myślał o matematyce bez przerwy. Pewnego razu zadzwonił do jednego ze swych studentów, pod jego domowy numer, o drugiej nad ranem i powiedział „Czy jest Pan teraz w bibliotece? Chciałbym, żeby Pan czegoś dla mnie poszukał!”. (...)

Niekiedy Bergman wydawał się tracić kontakt z rzeczywistością, najprawdopodobniej ze względu na swoje zaprzeczenie matematyce. Na przykład, pewnego dnia wybrał się z grupą znajomych (w tym z moim przyjacielem, który opowiedział mi później tę historię) na plażę w północnej Kalifornii. Plaże są tam chłodne, tak więc po wyjściu z wody Bergman uznał, że lepiej będzie przebrać się w suche rzeczy. Gdy wędrował w stronę parkingu, przyjaciele zauważyli, że zmierza w złym kierunku; byli jednak przyzwyczajeni do tego rodzaju zachowania i nie przejęli się zbytnio. Po chwili Bergman wrócił – ubrany – i wykrzyknął „Wiecie, w naszym samochodzie jest szalenię nieprzyjazna kobieta!”.

Besicovitch

Abram S. Besicovitch (1891–1970) był świetnym specjalistą w zakresie geometrycznych metod w analizie

mu pewną ilość pędu. Zmiana pędu ciała w czasie to siła, która na to ciało działa, a siła wywierana na powierzchnię jest właśnie ciśnieniem. Lebediew chciał zmierzyć kąt obrotu swobodnie zawieszonyj płytki, na którą padało światło.

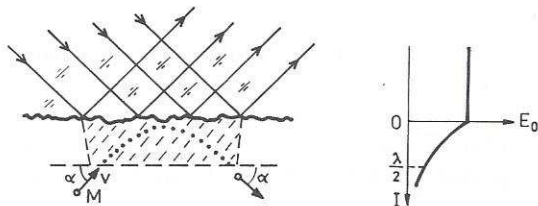
Pierwsze przekonujące doświadczenie zostało wykonane w 1933 r. przez Ottona Frischa w Hamburgu. W specjalnym piecu metaliczny sól został podgrzany znacznie powyżej temperatury topnienia. Przez małeńki otwór w piecu atomy sodu wypływały do zbiornika opróżnionego z powietrza, mniej więcej tak, jak wypływa strumień pary z dziubka czajnika z gotującą się wodą. Odpowiedni układ szczelin formował je w wiązkę, którą w określonym miejscu oświetlano światłem z lampy sodowej. Otto Frisch zarejestrował wyraźne odchylenie kierunku rozchodzenia się wiązki, co świadczyło o istnieniu pędu fotonów, a zatem również o ciśnieniu światła.

Optyka atomowa

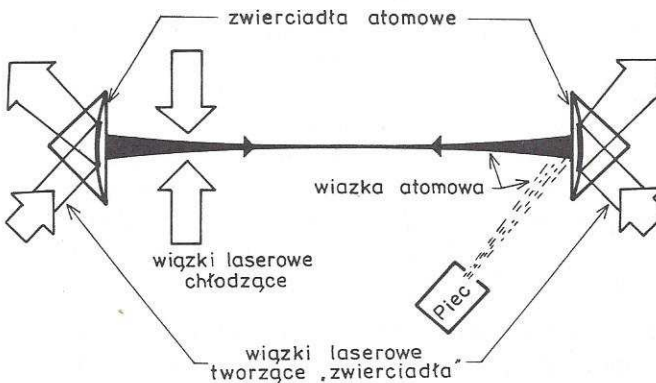
W ten sposób pojawiła się możliwość wykorzystania światła do manipulowania atomami. Jednak siła, działająca na atomy w doświadczeniu Frischa, była za mała do zastosowań praktycznych. Do idei wykorzystania tej siły powrócono dopiero w 1975 r. Początkowo użyto jej do spowalniania atomów, nieco później także do ich pułapkowania (izolowania pojedynczych atomów), aż wreszcie ostatnio stosuje się ją do takiego manipulowania atomami, że zachowują się one po prostu jak światło. Tak oto narodziła się optyka atomowa, to znaczy coś w rodzaju optyki geometrycznej w odniesieniu do atomów.

Wiązka atomów pod działaniem światła może ulec kolimacji, ogniskowaniu lub rozogniskowaniu, dokładnie tak, jak światło przechodzące przez układ soczewek. Może odbić się od cienkiej „warstwy” światła jak od zwierciadła (rys. 1), przechodzić przez siatkę dyfrakcyjną, którą jest stojąca fala świetlna, wreszcie może być wprowadzona do interferometru Younga, gdzie ulega dyfrakcji i następnie interferencji, której świadectwem jest układ prążków (rys. 2).

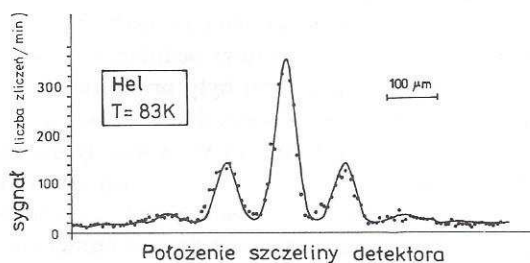
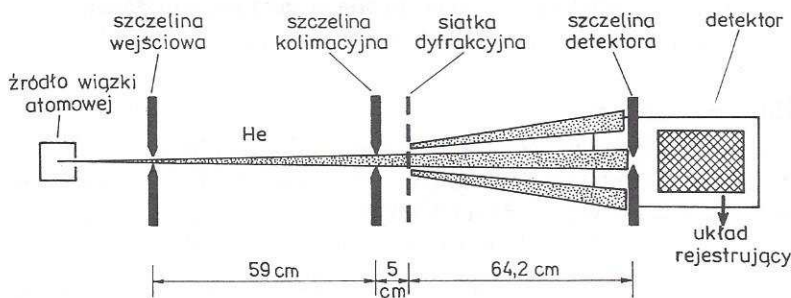
Rys. 1. Odbicie zwierciadlane wiązki atomowej.



a) Zasada działania „zwierciadła atomowego”.



b) „Zwierciadła” ogniskujące wiązkę atomową.



Rys. 2. Interferometr Younga do wiązki atomowej.

Ponadto światło można wykorzystać do zrobienia fontanny ultrazimnych atomów, co nie ma odpowiednika w optyce geometrycznej. Fontanna jest umieszczona w próżni, gdzie tryskające w górę atomy, jak w prawdziwej fontannie, opadają jedynie pod działaniem siły grawitacji. Gdy znajdują się u szczytu swego toru, stwarzają warunki do skrajnie długiego czasu „pomiaru” (rzędu 1 s) co, zgodnie z zasadą Heisenberga, pozwala zmierzyć różnicę energii poziomów z dokładnością 1000 razy lepszą od tej, z jaką dziś „działają” najlepsze zegary atomowe, w których taki pomiar jest podstawą wzorca czasu. Fontanna atomowa może być też wykorzystana do bardzo dokładnego pomiaru stałej grawitacji.

Bez trudu można zgadnąć, że wszystkie te możliwości zawdzięczamy laserom. Otóż w celu znacznego zwiększenia siły (1) należy zwiększyć prędkość procesu „rozpraszania”, czyli absorpcji i emisji fotonów przez atom. Zastosowanie światła laserowego prowadzi do rozpraszania 10 milionów fotonów na sekundę. Oświetlając zbiór N atomów światłem laserowym o częstotliwości rezonansowej bardzo szybko uzyskujemy stan nasycenia. Oznacza to, że połowa atomów jest w stanie wzbudzonym. O jednym atomie zbioru można wówczas powiedzieć, że średnio tyle samo czasu spędza w stanie podstawowym, co w stanie wzbudzonym. Zatem kolejny akt absorpcji fotonu przez atom następuje po czasie równym podwojonemu czasowi życia atomu w stanie wzbudzonym τ .

Światową sławę zyskał sobie dzięki rozwiązaniu tzw. problemu igły Kakeyi. Problem polegał na tym, by znaleźć obszar płaski o najmniejszym polu i tej własności, że odcinek długości 1 można w nim przemieścić tak, by w efekcie wykonał pełny obrót, o kąt 2π . Zdziwiająca odpowiedź Besicovitcha stwierdza, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taki obszar o polu mniejszym niż ε .

Besicovitch, z urodzenia Rosjanin, był istotą z dawnych czasów. Po opuszczeniu Rosji (zręczne posunięcie, gdy się weźmie pod uwagę plotki o jego czarnorynkowych poczynaniach w czasie pierwszej wojny światowej) ostatecznie trafił na uniwersytet w Cambridge, w Anglii. (...) Besicovitch był zdolnym człowiekiem, tak więc szybko nauczył się sprawnie mówić po angielsku. Ale doskonałości nigdy nie osiągnął. Zgodnie z rosyjskim paradygmatem nigdy nie używał rodzajników przed rzeczownikami. Pewnego dnia, podczas wykładu, studenci pokpiwali z jego lamanej angielszczyzny. Besicovitch odwrócił się do publiczności i rzekł „Panowie, pięćdziesiąt milionów Anglików mówi po angielsku tak, jak wy, zaś dwieście milionów Rosjan mówi po angielsku tak, jak ja.” Kpiny ustały. (...)

Besicovitch, mimo swej wyraźnej mocy twórczej, był skromny. W dniu swoich trzydziestych szóstych urodzin przekonywał sam siebie, że jego najlepsze, najbardziej intensywne lata pracy naukowej już minęły. Powiedział „Mam już za sobą cztery piąte mego życia.” Po dwudziestu trzech latach, gdy w roku 1950 przyznano mu Katedrę Matematyki Rouse Balla w Cambridge, ktoś przypomniał mu o owej lekkomyślnie rzuconej uwadze. Besicovitch odparł „Licznik był poprawny.” (...)

Lefschetz

Solomon Lefschetz (1884–1972) był inżynierem. Było to w czasach, gdy inżynieria była mieszaniną rzemiosła, alchemii i odrobiny szczęścia (era przed von Kármánem). W każdym razie, Lefschetz miał nieszczęście stracić obie dłonie w wypadku laboratoryjnym. Ten pechowy wypadek był dla nas szczęśliwy, bowiem wskutek niego Lefschetz, w wieku 36 lat, został matematykiem. (...)

Lefschetz grał w jednym z filmów nakręconych przez MAA (Mathematical Association of America – przyp. tłum.). Dał cudowny, przerywany kakofonią piszczącej kredy, wykład o swym słynnym twierdzeniu o punkcie stałym

Jego uczucia do owego filmu były mieszanane: w pewnym momencie na filmie Lefschetz mówi „Mam nadzieję, że to jest jasne; prawdopodobnie jest to mniej więcej tak jasne, jak błoto.” Po jego wykładzie następuje w filmie rozmowa przy okrągłym stole z udziałem Johna Moore’a, Lefschetza i kilku innych. Przez dziesięć czy piętnaście minut wspominają stare czasy w Princeton. Jedna z osób przypomina Lefschetzowi, jak to pod koniec lat czterdziestych, w czasie, gdy błyskawicznie rozwijała się i zdobywała sobie pozycję topologia algebraiczna, jechali razem pociągiem. Lefschetza zapytano, jaka jest różnica między algebra i topologią. Podobno odpowiedział „Jeśli to tylko kręcenie korbą, to jest to algebra, ale jeśli obecna jest przy tym jakaś idea, to wtedy to jest topologia.” Kiedy na filmie Lefschetzowi przypomniano ową historyjkę, szalenie się zawstydził i powiedział „Ja nie mogłem powiedzieć nic podobnego.” (...)

Lefschetz należał do tych matematyków – każdy z nas zna przynajmniej jednego z nich – którzy sypiają w czasie wykładów i budzą się pod koniec, by zadać jakieś błyskotliwe pytanie. Podczas jednego seminarium mówca zaciął się w pewnym punkcie, po około dwudziestu minutach swego wykładu. Nastąpiła kilkuminutowa cisza. Zaburzyło to rytm Lefschetza: obudził się, powiedział „Czy są jakieś pytania? Dziękuję Panu bardzo,” a seminarium zakończyło się zwyczajowymi brawami.

Wiener

Osoba znakomitego analityka Norberta Wienera (1894–1964) jest ulubionym tematem anegdot. Wiener jest wystarczająco współczesny, by znało go wielu żyjących matematyków, i był wystarczająco ekscentryczny, by być nieustającym obiektem opowieści i figli.

Urodził się jako syn sławnego profesora lingwistyki i został jednym z pierwszych znanych w świecie matematyków amerykańskich. Ze względu na antysemityzm panujący wśród rządzących amerykańską matematyką Wiener spędził wczesne lata swej kariery naukowej w Anglii. Historia głosi, że gdy spotkał Littlewooda, powiedział „O, więc Pan naprawdę istnieje. A ja myślałem, że Littlewood to tylko pseudonim, który Hardy umieszcza na swych słabszych pracach.” Biedny Wiener był tak rozszoszczony powtarzaniem owej historyjki, że gwałtownie zaprzeczał jej w swej autobiografii, tym samym

Wróćmy do przykładu z atomami sodu. Dla pierwszego stanu wzbudzonego w atomie sodu $\tau = 16$ ns. Skoro w jednym akcie absorpcji lub emisji prędkość atomu sodu zmienia się o Δv , to przyspieszenie, które jest równe zmianie prędkości w czasie, wynosi

$$(4) \quad a = \frac{\Delta v}{2\tau} = \frac{3 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}}{2 \cdot 16 \cdot 10^{-9} \text{ s}} \approx 10^6 \text{ m/s}^2.$$

Jest ono 100 000 razy większe od przyspieszenia ziemskiego $g \approx 10 \text{ m/s}^2$. Świadczy to o tym, że siła, z jaką światło działa na atomy, jest ogromna.

Chłodzenie atomów

Aby można było skutecznie manipulować atomami, należy je uprzednio spowolnić czy też oziębic. Tych dwóch określeń używamy wymiennie, ponieważ średnia energia ruchu cząstek przypadająca na jeden stopień swobody jest równa ich energii kinetycznej

$$(5) \quad k_B T / 2 = m v^2 / 2,$$

gdzie k_B jest stałą Boltzmanna, T temperaturą w kelwinach, m masą atomu, a v jego prędkością.

W przypadku chłodzenia jednowymiarowego wiązkę światła laserowego kierujemy „pod prąd” wiązki atomowej. Częstotść światła dobieramy tak, aby przy uwzględnieniu zjawiska Dopplera fotony „zderzające się” z atomami były przez nie pochłaniane. Oczywiście, każdemu aktowi absorpcji towarzyszy akt emisji fotonu. Pęd fotonów absorbowanych jest antyrównoległy do pędu atomu, więc skutek odrzutu po każdym akcie absorpcji prędkość atomu zmniejsza się o wartość Δv . Kierunek emitowanego fotonu jest zupełnie przypadkowy, więc po wielu aktach emisji zmiana pędu atomu wskutek odrzutu uśrednia się do zera. W rezultacie atom jest hamowany z ujemnym przyspieszeniem a , określonym wzorem (4). Jeżeli jest to atom sodu o prędkości początkowej $v_0 = 600 \text{ m/s}$, to po

$$(6) \quad n = \frac{v_0}{\Delta v} = \frac{600}{3 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^4$$

aktach absorpcji zostanie on zatrzymany. W stanie nasycenia kolejne fotony są absorbowane po czasie 2τ , więc na całkowite zatrzymanie atomu potrzeba $2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 0,64 \text{ ms}$, a zachodzi ono na drodze $s = at^2/2$, czyli na odcinku 20 cm.

W opisany tu sposób atomy można oziębic jedynie do $240 \mu\text{K}$ w przypadku sodu lub do $125 \mu\text{K}$ w przypadku cezu. Zgodnie z równaniem (5) odpowiada to prędkościom równym odpowiednio $0,3 \text{ m/s}$ i $0,1 \text{ m/s}$. Najnowsze techniki chłodzenia atomów pozwalają zejść do znacznie niższych temperatur.

Jaki jest skutek fizyczny tak niskiej temperatury lub raczej tak małej prędkości atomów? Otóż stają się one coraz bardziej „falowe”. Długość fali de Broglie’a wynosi

$$(7) \quad \lambda_{dB} = \frac{h}{mv},$$

zatem dla atomu sodu o prędkości $v = 600 \text{ m/s}$ mamy $\lambda_{dB} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ nm}$, a o prędkości $0,3 \text{ m/s}$ długość fali de Broglie’a rośnie do około 60 nm. Jak wynika z równania (7), stosując lekkie atomy, na przykład hel, można również uzyskać dłuższą falę i wówczas nie ma potrzeby schładzania ich do tak skrajnie niskich temperatur. Dla atomów helu już przy $T = 83 \text{ K}$ długość fali de Broglie’a wynosi $\lambda_{dB} \approx 0,1 \text{ nm}$. Dzięki temu w interferometryce Younga zastosowanym do wiązki atomowej obserwuje się wyraźne prążki interferencyjne (rys. 2).

W optyce atomowej wykorzystuje się dwa zjawiska wywołane przez światło laserowe. Są to: ciśnienie światła i gradient natężenia pola elektrycznego fali elektromagnetycznej. Kolimacja, ogniskowanie i rozogniskowanie wiązki atomowej to po prostu wpływanie na wartość składowej poprzecznej prędkości atomów w wiązce i w tym celu można wykorzystać każdy z tych efektów.

Zjawisku całkowitego wewnętrznego odbicia towarzyszy częściowe przejście fali do ośrodka granicznego, przy czym fala ta zanika na odcinku bliskim połowie długości tej fali. Gdy silne światło laserowe ulega całkowitemu wewnętrznemu odbiciu w płycie kwarcowej graniczącej z próżnią, mamy do czynienia z bardzo dużym gradientem natężenia pola elektrycznego w próżni. Powstała dzięki temu siła działa na atomy i pozwala uzyskać efekt „zwierciadła” (rys. 1).

Czy światło jest żywiołem?

Jak widać, ujarzmienie światła doprowadziło do realizacji najbardziej fantastycznych zadań. W starożytnej filozofii wyróżniono cztery żywioły: ogień, wodę, powietrze i ziemię. Światła, oczywiście, nie brano w ogóle pod uwagę. Rodzi się pytanie, czy jest to żywioł i czy już jest groźny? Nie chcę tu mówić o broni laserowej, lecz o manipulowaniu za pomocą światła atomami, po których przyszła już kolej na większe cząsteczki, a nawet mikroorganizmy. Okazało się, że odpowiednio dobrana i wprowadzona do mikroskopu wiązka światła laserowego stanowi „pincetę optyczną”, za pomocą której biologzy manipulują obiektami, które znajdują się wewnątrz żywej komórki, bez uszkodzenia jej ścian. Gdy światło jest wykorzystywane, na przykład, do badania na poziomie molekularnym siły wytwarzanej przy skurczu mięśnia czy sprężystości cząsteczki DNA, możemy się tylko cieszyć. Jednak, gdy uczeni zaczynają nie tylko badać, ale także manipulować genami, pojawia się poważne zagrożenie, które usprawiedliwia nazwanie światła żywiołem, i to takim, który powinien być kontrolowany.



Rozwiązanie zadania M 667.

Z definicji ciągu x_n mamy

$$x_{n+1} + 9k = x_n + x_{n-1} + \dots + x_0 = \\ = x_n + x_n + 9m,$$

więc

$$x_{n+1} \equiv 2x_n \pmod{9},$$

$$x_{n+6} \equiv 2^6 x_n \equiv x_n \pmod{9},$$

$$\text{i } x_{n+6} = x_n.$$

Ciąg x_1, x_2, x_3, \dots jest więc okresowy.

Stąd $x_0, x_1, x_2, \dots = 1, 124875124, \dots =$

$= 1 \frac{125}{1001}$, co istotnie jest liczbą wymierną.



Rozwiązanie zadania M 668.

Przypuśćmy przeciwnie, że dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości odpowiednio $p, p+2$ i $k \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$p^2 + (p+2)^2 = k^2,$$

czyli

$$2(p^2 + 2p + 2) = k^2.$$

Liczba w nawiasie jest nieparzysta, a więc kwadrat liczby k byłby podzielny przez 2, ale nie przez 4, co jest niemożliwe.

Sprostowanie

Komentarz do rysunku 4 naszego artykułu „Wędrowki” (*Delta* 11/1992) jest błędny. Mianowicie czworościan, którego wszystkie ściany mają jednakowe pola, ma jednakowe ściany, tzn. są one trójkątami przystającymi. Dziękujemy Panu Leszkowi Janowi Ciachowi za wskazanie tego błędu.

Przepraszamy

Małgorzata MIKOŁAJCZYK, Krzysztof OMILJANOWSKI

niezamierzenie wzbudzając wiarę w jej prawdziwość. (By oddać sprawiedliwość Wienerowi, powinienem wspomnieć, że inna popularna wersja tej historii dotyczy Edmunda Landaua: Landau tak dalece wątpił w istnienie Littlewooda, że wybrał się na specjalną wycieczkę do Wielkiej Brytanii, by zobaczyć go na własne oczy.) (...)

Studenci lubili płać Wienerowi figle. Codziennie o tej samej porze Wiener czytał gazetę w pewnym holu w M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology – przyp. tłum.). Gdy siedział z rozpostartą przed sobą płachtą gazety, podkładał się student i podpalał papier od dołu. Efekty były bardzo widowiskowe, a dowcip powtarzano wielokrotnie.

Czasami znów Wiener żartował sobie ze studentów, choć nie zawsze zdawał sobie sprawę, że to robi. Jeden ze studentów poprosił go kiedyś o rozwiązanie pewnego problemu. Wiener chwilę pomyślał i napisał odpowiedź. Student, któremu chodziło nie tyle o odpowiedź, co o wytłumaczenie metody jej uzyskania (było to rzeczywiście dawno temu!), powiedział „Ale czy nie ma jakiegoś innego sposobu?” Wiener pomyślał przez kolejną chwilę, uśmiechnął się, i rzekł „Tak, jest” – i napisał odpowiedź po raz drugi.

Moja ostatnia historia o Wienerze, w istocie ostatnia z moich historyjek, nie wydaje się być dobrze znana. Nawet zaprzędani wienerologowie twierdzą, że jest zbyt dobra, żeby mogła być prawdziwa. Sądzę, że poznałem ją jako doktorant w Princeton. Jak wspominałem, Wiener był bardzo sławną postacią na kampusie w M.I.T. Zatem, kiedy jeden z jego studentów spostrzegł go na pocztce, zaprzęgnął przedstawić się sławnemu profesorowi. Poza wszystkim – jak wielu studentów M.I.T. może się pochwalić, że ściskali dłoń Norberta Wienera? Jednakże student nie był pewny, w jaki sposób ma się do niego zbliżyć. Problem był tym poważniejszy, że Wiener przechadzał się w tę i z powrotem, głęboko zamyślony. Jeśliby student mu przerwał, kto wie, jaki ważny pomysł mógłby zaginać? Mimo to student zdobył się na odwagę i zbliżył się do wielkiego człowieka. Powiedział „Dzień dobry, Profesorze Wiener.” Profesor podniósł wzrok, uderzył się w czoło i rzekł „To jest to: Wiener!”