„Paradoksy" symetrii czasowej

Mirosław LACHOWICZ

Podstawową teorią fizyczną, opisującą szeroki krąg zjawisk, jest klasyczna mechanika newtonowska. W jej ramach można traktować dowolne ciało jako zbiór oddziałujących na siebie obiektów mikroskopowych (cząstek). Owe obiekty tworzą układ, którego zachowanie w czasie opisują równania różniczkowe zwyczajne (równania Newtona). Istotną cechą układu jest jego odwracalność w czasie. Wynika ona z faktu, iż transformacja $t \to -t$ nie zmienia postaci równań (równania Newtona są rzędu drugiego). Jeśli znany jest stan początkowy, to można określić zarówno przeszłość, jak i przyszłość układu, przy czym nie ma możliwości, aby „odróżnić" to, co przeszłe, od tego, co przyszłe.

Oczywiście, w ramach mechaniki klasycznej nie da się wytłumaczyć (na przykład), dlaczego kostka cukru rozpuszcza się w herbacie i dlaczego nikt nie zaobserwował zjawiska odwrotnego. Teorią, która opisuje procesy nieodwracalne jest termodynamika. Druga zasada termodynamiki (sformułowana po raz pierwszy w roku 1852 przez Thompsona) wyznacza kierunek czasu (odróżnia przeszłe od przyszłego). Jedno z możliwych sformułowań drugiej zasady termodynamiki, poprzez wprowadzone w 1865 roku przez Clausiusa pojęcie *entropii*, mówi, że entropia układu izolowanego rośnie w czasie.

Próbę „wydedukowania" nieodwracalności z odwracalnej mechaniki klasycznej podjął Boltzmann (1872). Rozważał on 6-wymiarową przestrzeń fazową położeń i pędów (tzw. *przestrzeń* μ). Każda z N cząstek układu reprezentowana była przez pewien punkt w tej przestrzeni. Zakładał nierozróżnialność cząstek i nie interesował się ich położeniami w przestrzeni μ, lecz gęstością prawdopodobieństwa (tzw. *funkcją rozkładu*) jednej (statystycznej) cząstki. W oparciu o mechanikę klasyczną oraz tzw. *hipotezę o molekularnym chaosie* wyprowadził równanie opisujące ewolucję w czasie funkcji rozkładu.

Hipoteza o molekularnym chaosie, sformułowana w 1857 roku przez Clausiusa, mówi o statystycznej niezależności stanów cząstek. To właśnie przyjęcie tej hipotezy wprowadziło do modelu Boltzmanna „losowość" i opisowi nadało charakter statystyczny.

Nie będę tutaj opisywać samego równania Boltzmanna, które jest skomplikowanym nieliniowym równaniem różniczkowo-całkowym, lecz omówię ważną konsekwencję tego równania – słynne *twierdzenie H* Boltzmanna. Twierdzenie H mówi, że rozwiązaniu równania Boltzmanna można przypisać pewną wielkość $H = H(t)$, zwaną *funkcją H* Boltzmanna, mającą tę samą własność co entropia S. Mówiąc ściślej, H maleje w czasie, a zatem odgrywa rolę $-S$, entropii z przeciwnym znakiem.

Czy można zatem uznać, że problem nieodwracalności został rozwiązany, a druga zasada termodynamiki sprowadzona do mechaniki newtonowskiej? Nie, tak, oczywiście, nie jest!

Wątpliwości co do koncepcji Boltzmanna – wyprowadzenia nieodwracalności z mechaniki klasycznej – pojawiły się wkrótce po opublikowaniu jego pracy.

Kelvin oraz, nieco później, Loschmidt (1876) zauważyli, że nieodwracalność zawarta w teorii Boltzmanna nie może być traktowana jako wniosek z mechaniki klasycznej. Jak już wspomniałem, równania mechaniki klasycznej są symetryczne względem zmiany kierunku czasu, tzn. względem transformacji $t \to -t$. Tymczasem po dokonaniu tej transformacji funkcja H staje się rosnąca, co przeczy twierdzeniu H. Jest to tak zwany *paradoks odwracalności*.

Drugi paradoks pochodzi od Zermelo (1896) i nazwany jest *paradoksem powracalności*. Opiera się on na twierdzeniu Poincarégo, które mówi, że każdy zachowawczy i zamknięty układ mechaniczny powraca, po dostatecznie długim czasie, do dowolnie małego otoczenia prawie każdego stanu początkowego. Zatem funkcja H, która początkowo maleje, powinna następnie rosnąć, aby przy powrocie w pobliże stanu początkowego przyjmować wartości bliskie wartościom początkowym. Ponieważ jednak funkcja H cały czas maleje – pojawia się sprzeczność.

Przytoczone paradoksy wyraźnie wykazują, że teoria Boltzmanna nie może być konsekwencją jedynie czysto mechanicznego modelu. Jak już wspomniałem, w modelu Boltzmanna elementem spoza mechaniki klasycznej była hipoteza o molekularnym chaosie nadająca modelowi charakter statystyczny. To właśnie wprowadzenie tej hipotezy czyni model nieodwracalnym. Zatem zrozumienie nieodwracalności modelu sprowadza się do zrozumienia istoty hipotezy o molekularnym chaosie.

Między Boltzmannem a jego oponentami toczyła się bardziej walka na słowa niż na argumenty naukowe. Boltzmann do końca życia był przekonany o słuszności swojej teorii, nie mógł jednak odeprzeć stawianych mu zarzutów. Być może świadomość trudności, jakie ów problem w sobie kryje, mogła być przyczyną samobójczej śmierci Boltzmanna w 1906 roku.

Spróbujmy wyjaśnić opisane paradoksy na uproszczonym modelu, który zawiera wszystkie istotne cechy modelu fizycznego, ale jest na tyle prosty, że analiza staje się przejrzysta. Model ten nosi nazwę *kołowego modelu Kaca* (opis można znaleźć w książce Marka Kaca *Kilka zagadnień stochastycznych fizyki i matematyki*, PWN 1961). Rozważmy na okręgu n punktów $P_1, \ldots, P_n$ rozłożonych równomiernie w porządku wyznaczonym przez kierunek ruchu wskazówek zegara. Załóżmy, że $2m < n$ i m punktów jest zaznaczonych: tworzą one zbiór S. Pomiędzy każdymi dwoma kolejnymi punktami P_j i P_{j+1} (przyjmujemy, że $P_{n+1} = P_1$, $P_{n+2} = P_2$ itd.) znajduje się kula o jednym z dwóch kolorów: biała lub czarna. W jednostce czasu każda kula przesuwa się o jedno miejsce w kierunku ruchu wskazówek zegara (tzn. kula, która była pomiędzy P_j i P_{j+1} znajdzie się między P_{j+1} i P_{j+2}). Kula zmienia kolor wtedy i tylko wtedy, gdy przechodzi przez punkt ze zbioru S. Zagadnienie formułuje się w ten sposób, że dla zadanego początkowego rozkładu kolorów należy znaleźć rozkład po t krokach. Wprowadźmy następujące oznaczenia: $N_c(t)$ oraz $N_b(t)$ są odpowiednio liczbami czarnych i białych kul w chwili t. Ponadto

$$a_j = \begin{cases} -1, & \text{gdy } P_j \in S, \\ 1, & \text{gdy } P_j \notin S \end{cases}$$

oraz

$$f_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli kula między } P_j \text{ i } P_{j+1} \text{ jest czarna w chwili } t, \\ -1, & \text{jeżeli kula między } P_j \text{ i } P_{j+1} \text{ jest biała w chwili } t, \end{cases}$$

dla $j = 1, \ldots, n$.

Ewolucję układu w czasie określa następujące równanie:

$$f_j(t) = a_j f_{j-1}(t-1)\,,$$

gdyż kula znajdująca się między P_j i P_{j+1} w chwili t przyszła tam z położenia między P_{j-1} i P_j w chwili $t-1$ zmieniając kolor lub nie, zależnie od tego czy punkt P_j jest w zbiorze S, czy nie. Stąd otrzymujemy

$$f_j(t) = a_j a_{j-1} \cdot \ldots \cdot a_{j-t+1} f_{j-t}(0)\,.$$

Równanie to opisuje dynamikę danego modelu, a zatem może być uznane za odpowiednik równań mechaniki klasycznej. Podobnie jak te równania rozważany model jest zarówno odwracalny jak i ma własność powracalności. Zmieniając kierunek ruchu po okręgu (co odpowiada transformacji $t \to -t$) wraca się do punktu wyjścia: model jest więc odwracalny. Powracalność jest równie łatwa do zaobserwowania, gdyż model jest okresowy o okresie $2n$. Faktycznie, po n krokach każda kula wróci do swojego początkowego położenia przechodząc przez wszystkie punkty zbioru S. Będzie miała wtedy kolor wyznaczony przez $(-1)^m f_j(0)$. Zatem po $2n$ krokach kula wróci do swojego początkowego koloru: $(-1)^{2m} f_j(0) = f_j(0)$.

Oczywiście, model jest w pełni deterministyczny. Naśladując idee Boltzmanna można do modelu wprowadzić losowość. W tym celu można przyjąć, że zbiór S nie jest zadany z góry, lecz, że każdy punkt $P_1, \dots, P_n$, niezależnie od pozostałych, jest z prawdopodobieństwem $\beta = \frac{m}{n}$ zaliczany do S, gdzie β jest ustalone i mniejsze od $\frac{1}{2}$. Następnie można obliczyć wartość średnią różnicy $N_c(t) - N_b(t)$. Wynik jest następujący

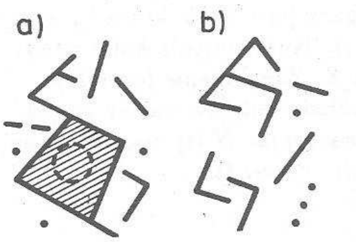
$$\langle N_c(t) - N_b(t) \rangle = (1 - 2\beta)^{n - |n - t|} (N_c(0) - N_b(0)) .$$

Zatem dla n bardzo dużego liczby czarnych i białych kul będą się wyrównywały wykładniczo wraz ze wzrostem czasu t ($t < n$), niezależnie od stanu początkowego. Jest to odpowiednik twierdzenia H Boltzmanna.

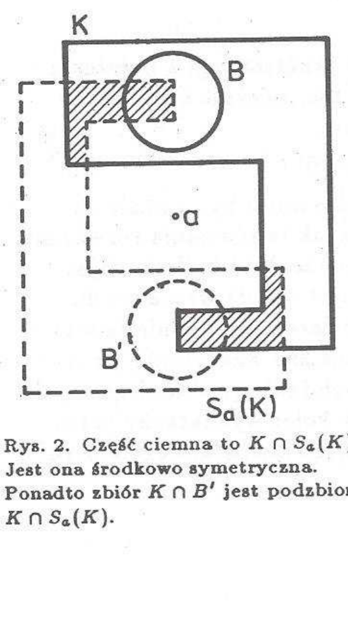
Otrzymany wynik wskazuje na źródło nieodwracalności – jest nim wprowadzenie do modelu elementów „pozamechanicznych": uśrednienia oraz przejścia granicznego, obcych indywidualnym układom mechanicznym. W modelu Kaca uśrednia się po zbiorach S i rozważa granicę przy $n \to \infty$. Jest to pełna analogia do modelu Boltzmanna. To sugeruje, że równanie Boltzmanna należy traktować jako „ścisłe w pewnym uśrednieniu". Niestety, tej intuicji – nawet dzisiaj, 120 lat po powstaniu teorii Boltzmanna – nie udało się nadać zadowalającego matematycznego kształtu. Należy przypuszczać, że zagadnienia te w dalszym ciągu będą wzbudzały silne emocje i gorące dyskusje (por. Prigogine i Stengers, *Z chaosu ku porządkowi*, PIW 1990).

Symetrie, symetrie, symetrie

Piotr HAJŁASZ



Rys. 1. Mówimy, że figura płaska ma niepuste wnętrze, jeżeli zawiera ona pewne koło. Figura na rysunku a) ma niepuste wnętrze, a na rysunku b) – puste.



Rys. 2. Część ciemna to $K \cap S_a(K)$. Jest ona środkowo symetryczna. Ponadto zbiór $K \cap B'$ jest podzbiorem $K \cap S_a(K)$.

Gdy mamy dowolny, np. bardzo „paskudny" zbiór, to wydaje się, że nie można dopatrzeć się w nim żadnych symetrii. Dlatego przeczy trochę naszej intuicji następujący fakt:

Dowolna płaska figura ograniczona o niepustym wnętrzu (tzn. zawierająca pewne koło) jest sumą skończonej liczby (niekoniecznie rozłącznych) figur środkowo symetrycznych.

Wbrew pozorom, dowód tego nie jest trudny. Figurę oznaczmy przez K, przez B zaś koło w niej zawarte. Niech ponadto S_a oznacza symetrię środkową względem punktu a. Nietrudno zauważyć, że figura $K \cap S_a(K)$ jest środkowo symetryczna. Ponadto figura ta zawiera tę część zbioru K, która jest przykryta przez koło $B' = S_a(B)$. Ponieważ figurę K można przykryć za pomocą skończonej liczby takich kół $S_{a_1}(B), \dots, S_{a_n}(B)$ (przy odpowiednio dobranych $a_1, \dots, a_n$), więc figura K jest sumą figur środkowo symetrycznych $K \cap S_{a_1}(K), \dots, K \cap S_{a_n}(K)$.

Podobnie w innych pozbawionych symetrii sytuacjach możemy dowolny „obiekt" przedstawić za pomocą „obiektów symetrycznych". A oto przykład (niezbędne wyjaśnienia znajdują się na marginesie sąsiedniej strony).

Niech X będzie dowolnym zbiorem. Wówczas każdą bijekcję $F : X \to X$ można przedstawić jako złożenie dwóch inwolucji.

Ktoś może zaprotestować. Nie ma tu przecież mowy o żadnej symetrii. My jednak odpieramy atak mówiąc, że słowo *symetria* pisaliśmy w cudzysłowie, a więc mieliśmy na myśli coś, co tylko w jakimś stopniu przypomina symetrię. A czy inwolucja przypomina symetrię? Zastanówmy się, co wyróżnia symetrie spośród izometrii. Otóż, symetrie to takie izometrie, które zastosowane dwukrotnie (dwukrotnie ta sama symetria) dają identyczność. Tak jest rzeczywiście dla symetrii względem punktu, prostej, płaszczyzny i... już dla żadnej innej izometrii (dlaczego?). A więc symetrie to te izometrie, które są inwolucjami. Śmiało więc możemy w przypadku dowolnego zbioru inwolucję uznać za prawidłowe uogólnienie symetrii.