# Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1993

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

## Zadania z fizyki nr 161, 162

**161. Zbrodnia w ciemni fotograficznej**

Inspektor Wnikliwy przesłuchiwał Męczysława Rozwałkę, fotografa z dalekiego przedmieścia Czarny Koniec.

– A więc, jeśli to nie ty zamordowałeś twojego wspólnika Naiwińskiego, to kto to zrobił?

– Nie znam go, panie inspektorze. Widziałem go tylko przez krótką chwilę, i to w słabym świetle lampy ciemniowej. Wywoływałem właśnie odbitki, gdy nagle usłyszałem hałas. Odwróciwszy się zobaczyłem biednego Naiwka na podłodze z nożem w plecach, i tamtego drania uciekającego. Był raczej niskiego wzrostu, miał na sobie zielony sweter i niebieskie spodnie. W uchu zauważyłem błyszczący kolczyk.

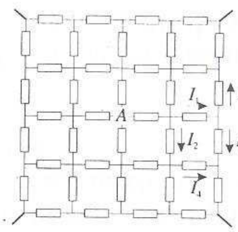
– Wystarczy, Rozwałko. Wyjątkowo nieudolnie kłamiesz – widać, że brakuje ci podstawowych wiadomości z fizyki. To zeznanie będzie koronnym dowodem przeciw tobie. Sierżancie, odprowadźcie go!

W jaki sposób inspektor Wnikliwy zdemaskował mordercę?

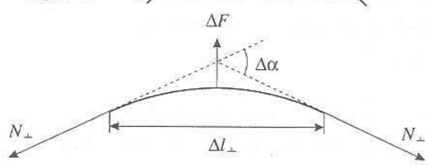
**162.** Strumień wody wypływa z poziomej rury. Prędkość wody w rurze zmienia się z odległością $r$ od osi rury zgodnie ze wzorem $v(r) = v_0[1-(r/r_0)^2]$, gdzie $r_0$ jest promieniem rury, a maksymalna prędkość $v_0$ ma wartość 10 m/s. Zakładając, że dzięki siłom spójności strumień nie rozdzieli się, obliczyć wysokość spadku wody do chwili uderzenia w pionową ścianę odległą o 1 metr od wylotu rury.

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 149 ($WT$=2,38) i 150 ($WT$=2,08) z numeru 12/1992

| | | |
|---|---|---|
| Przemysław Gworys | – Częstochowa | 32,92 |
| Tomasz Wietecha | – Tarnów | 32,90 |
| Andrzej Nowogrodzki | – Chocianów | 21,97 |
| Andrzej Borowski | – Aleksandrów K. | 18,43 |




Rys. 1




Rys. 2

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1993

Przypominamy treść zadań:

**157.** W układzie 40 jednakowych oporników po 1 Ω (rys. 1) cztery rogi są zwarte. Ile wynosi opór zastępczy między tymi czterema rogami a środkowym punktem $A$?

**158.** Do dwóch punktów $A$ i $B$ odległych o $d$ przymocowane są końce wiotkiego, nierozciągliwego przewodu o długości $l > d$, przez który płynie prąd o natężeniu $I$. Zbadać kształt przewodu i obliczyć siłę napinającą, jeśli przewód znajduje się w zewnętrznym jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B}$ skierowanym równolegle do odcinka $AB$. Założyć, że własne pole magnetyczne przewodu jest pomijalnie małe w porównaniu z polem zewnętrznym.

**157.** Oznaczmy przez $I$ całkowity prąd przepływający przez układ i przyjmijmy, że dodatni zwrot $I$ jest od $A$ do rogów. Z symetrii problemu wynika, że przez każdy z oporników dołączonych do $A$ przepływa $I/4$, a przez każdy z oporników dołączonych końcem do jednego z rogów przepływa $I/8$. Jeśli wprowadzimy dodatkową zmienną $I_1$ (rys. 1), to z I prawa Kirchhoffa i z symetrii możemy wyznaczyć wszystkie pozostałe prądy:

$$I_3 = \frac{1}{2}I_1, \quad I_2 = I_4 = \frac{1}{8}I - \frac{1}{2}I_1 .$$

Wystarczy teraz zastosować II prawo Kirchhoffa do któregokolwiek z ośmiu oczek sieci, w których występują prądy $I_1$ i $I_3$. Otrzymujemy równanie

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4 , \quad \text{zatem } I_1 = \frac{1}{10}I .$$

Spadek napięcia od $A$ do rogu może być wyliczony po dowolnej drodze, np. $U = R(I/4 + I_2 + I_4 + I/8) = \frac{21}{40}RI$, skąd $R_{zast} = \frac{21}{40}R = 0,525\ \Omega$.

**158.** Na każdy element $\Delta\mathbf{l}$ przewodu działa siła $\Delta\mathbf{F} = I\Delta\mathbf{l}\times\mathbf{B}$. Siła ta jest prostopadła do przewodu, skąd wynika wniosek, że siła działająca wzdłuż niego (siła napinająca) ma stałą wartość $N$ na całej jego długości. Ponadto siła $\Delta\mathbf{F}$ jest prostopadła do $\mathbf{B}$, zatem składowa siły napinającej wzdłuż $\mathbf{B}$ ma także jednakową wartość wzdłuż przewodu. Stały musi być więc też kąt nachylenia przewodu względem pola, a także wartość prostopadłej składowej $N_\perp$.

Zbadajmy kształt, jaki tworzy rzut przewodu na płaszczyznę prostopadłą do $\mathbf{B}$. Siły działające na mały element przewodu muszą się równoważyć (rys. 2), czyli

$$N_\perp \Delta\alpha = I\Delta l_\perp B .$$

Uwzględniając, że $I$, $B$ i $N_\perp$ są stałe, dochodzimy do wniosku, że zakrzywienie przewodu nie zmienia się – zatem jest on łukiem okręgu o promieniu $r = \frac{N_\perp}{IB}$. W przestrzeni przewód jest linią śrubową. Oznaczmy przez $l_\perp$ składową prostopadłą długości przewodu, tzn. $l_\perp = \sqrt{l^2-d^2}$. Ponieważ siła napinająca jest równoległa do przewodu, więc

$$\frac{l_\perp}{l} = \frac{N_\perp}{N} = \frac{IBr}{N} .$$

Jeśli przewód utworzy $n$ zwojów spirali, to $l_\perp = 2\pi rn$ i otrzymujemy wynik $N = \frac{IBl}{2\pi n}$. Autor sądzi, że powstanie tylko jeden zwój. Przemawia za tym warunek minimum energii: jeśli rozpoczynając od przewodu prostoliniowego będziemy stopniowo w jednym z punktów $A$ lub $B$ „popuszczać” przewód, to największą pracę wykona on dla $n = 1$, najbardziej zatem spadnie energia pola magnetycznego. Trudno byłoby jednak wykazać, że dla $n > 1$ równowaga przewodu jest nietrwała.

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 249 ($WT$=2,83) i 250 ($WT$=1,68) z numeru 11/1992

| | | |
|---|---|---|
| Tomasz Wietecha | – Tarnów | 42,83 |
| Jerzy Janowicz | – Bolesławiec | 39,48 |
| Mirosław Matlęga | – Skoczów | 38,76 |
| Leszek Gasiński | – Stalowa Wola | 37,04 |

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

## Zadania z matematyki nr 263, 264

**263.** W każdym okienku tabeli prostokątnej o wymiarach $10 \times 2$ umieszczamy kółko lub krzyżyk tak, by żadne dwa krzyżyki nie znalazły się w okienkach sąsiednich (mających wspólny bok). Ile jest takich rozmieszczeń?

**264.** Udowodnić, że dla $x \in (0; \pi/4)$ zachodzi nierówność $\sin(\operatorname{tg} x) > x$.

Zadanie 264 zaproponował pan Józef Banaś z Rzeszowa.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1993

Przypominamy treść zadań:

**259.** Dana jest liczba rzeczywista $a$. Wyznaczyć wszystkie czwórki liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ spełniające układ równań

$$\begin{cases} (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x_4 = a \\ (x_2 + x_3 + x_4) \cdot x_1 = a \\ (x_3 + x_4 + x_1) \cdot x_2 = a \\ (x_4 + x_1 + x_2) \cdot x_3 = a. \end{cases}$$

**260.** Na okręgu danych jest pięć różnych punktów $A$, $B$, $C$, $D$, $U$. *Prosta Simsona* punktu $U$ względem trójkąta $ABC$ to prosta przechodząca przez rzuty punktu $U$ na proste $AB$, $AC$, $BC$. Analogicznie określamy proste Simsona punktu $U$ względem trójkątów $ABD$, $ACD$, $BCD$. Udowodnić, że rzuty prostokątne punktu $U$ na te cztery proste Simsona są współliniowe.

**259.** Przyjmijmy, że liczby $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ spełniają dany układ i oznaczmy sumę $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ przez $s$. Zatem $(s - x_i)x_i = a$ dla $i = 1, 2, 3, 4$, co oznacza, że każda z liczb $x_i$ jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego $x^2 - sx + a$. Są więc wśród tych liczb co najwyżej dwie różne. Ponieważ układ jest symetryczny (niezmienniczy względem permutacji), wystarczy rozważyć następujące przypadki:

(1) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$;
(2) $x_1 = x_2 = x_3 \neq x_4$;
(3) $x_1 = x_2 \neq x_3 = x_4$.

W każdym z tych przypadków dalsze postępowanie jest oczywiste. Wyniki:
Przypadek (1) możliwy tylko dla $a \geq 0$ i wówczas $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \pm\sqrt{a/3}$;
przypadek (2) możliwy tylko dla $a = 0$ i wówczas $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4$ dowolne ($\neq 0$);
przypadek (3) możliwy tylko dla $a < 0$ i wówczas $x_1 = x_2 = -x_3 = -x_4 = \pm\sqrt{-a}$.

Uwzględniając wspomnianą symetrię układu otrzymujemy odpowiedź:
Dla $a = 0$ rozwiązaniem jest każda czwórka liczb postaci

$$(c, 0, 0, 0),\quad (0, c, 0, 0),\quad (0, 0, c, 0),\quad (0, 0, 0, c);\quad c \text{ dowolne;}$$

dla $a > 0$ układ ma dwa rozwiązania:

$$\left(\sqrt{a/3}, \sqrt{a/3}, \sqrt{a/3}, \sqrt{a/3}\right) \quad \text{oraz}$$
$$\left(-\sqrt{a/3}, -\sqrt{a/3}, -\sqrt{a/3}, -\sqrt{a/3}\right);$$

dla $a < 0$ układ ma sześć rozwiązań:

$$(q, q, -q, -q),\quad (q, -q, q, -q),\quad (q, -q, -q, q),$$
$$(-q, q, q, -q),\quad (-q, q, -q, q),\quad (-q, -q, q, q),\quad \text{gdzie } q = \sqrt{-a}.$$

**260.** Użyjemy języka geometrii płaszczyzny zespolonej. Dla dowolnej pary różnych liczb zespolonych $p$, $q$ równanie

$$(1) \qquad \left(\bar{p}q + \bar{q}z + \bar{z}p\right) - \left(p\bar{q} + q\bar{z} + z\bar{p}\right) = 0$$

(zmiennej $z$) przedstawia linię prostą przechodzącą przez punkty $p$ i $q$. Oznaczmy przez $g(p, q)$ liczbę zespoloną przedstawiającą rzut punktu 0 (początku układu współrzędnych kartezjańskich) na tę prostą. Liczbę $z = g(p, q)$ wyznaczymy rozwiązując układ dwóch równań (z niewiadomymi $z$ i $\bar{z}$): (1) oraz

$$(2) \qquad \frac{z}{p - q} + \frac{\bar{z}}{\bar{p} - \bar{q}} = 0$$

(równanie (2) mówi, że część rzeczywista liczby $z/(p - q)$ jest równa zeru; wyraża więc warunek prostopadłości wektora wodzącego punktu $z$ do wektora kierunkowego prostej przechodzącej przez $p$ i $q$). Z układu (1), (2) otrzymujemy dla $z = g(p, q)$ wzór

$$(3) \qquad g(p, q) = \frac{\bar{p}q - p\bar{q}}{2(\bar{p} - \bar{q})}.$$

Przyjmijmy, że rozważany w zadaniu okrąg ma równanie $|z - 1| = 1$, punkt $U$ jest reprezentowany przez liczbę 0, a punkty $A$, $B$, $C$, $D$ – przez liczby zespolone $a$, $b$, $c$, $d$. Podane równanie okręgu możemy przepisać w postaci $(z - 1)(\bar{z} - 1) = 1$, czyli

$$(4) \qquad z\bar{z} = z + \bar{z}.$$

Jeśli więc punkty $p$ i $q$ leżą na tym okręgu, to $\bar{p} = p/(p - 1)$, $\bar{q} = q/(q - 1)$, a zatem liczba $g(p, q)$ dana wzorem (3) równa się

$$(5) \qquad g(p,q) = \left(\frac{pq}{p-1} - \frac{pq}{q-1}\right)\left(\frac{2p}{p-1} - \frac{2q}{q-1}\right)^{-1} = \frac{pq(q-p)}{2(q-p)} = \frac{pq}{2}.$$

Wobec tego rzuty punktu 0 (czyli $U$) na proste $AB$, $AC$, $BC$ są reprezentowane przez liczby $ab/2$, $ac/2$, $bc/2$. Aby się upewnić, że definicja prostej Simsona jest poprawna, należy ustalić, że te punkty są współliniowe. Wystarczy w tym celu sprawdzić równość (1) przyjmując za $p$, $q$, $z$ iloczyny $ab$, $ac$, $bc$; w sprawdzeniu wykorzystujemy warunek (4) dla liczb $a$, $b$, $c$:

$$\begin{aligned} \left(\overline{ab} \cdot ac + \overline{ac} \cdot bc + \overline{bc} \cdot ab\right) - \left(ab \cdot \overline{ac} + ac \cdot \overline{bc} + bc \cdot \overline{ab}\right) &= \\ = \left(a + \bar{a}\right)\bar{b}c + \left(c + \bar{c}\right)\bar{a}b + \left(b + \bar{b}\right)a\bar{c} &- \\ - \left(a + \bar{a}\right)b\bar{c} - \left(c + \bar{c}\right)a\bar{b} - \left(b + \bar{b}\right)\bar{a}c &= \\ = a\bar{b}c + \overline{ab}c + \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c} + ab\bar{c} + a\overline{bc} &- \\ - ab\bar{c} - \bar{a}b\bar{c} - a\bar{b}c - a\overline{bc} - \bar{a}bc - \overline{ab}c &= 0. \end{aligned}$$

Stąd żądana współliniowość trójki punktów $ab$, $ac$, $bc$.

Oznaczmy proste Simsona punktu 0 względem trójkątów $BCD$, $ACD$, $ABD$, $ABC$ odpowiednio przez $l_a$, $l_b$, $l_c$, $l_d$, a liczby zespolone przedstawiające rzuty punktu 0 na te cztery proste – przez $u_a$, $u_b$, $u_c$, $u_d$. Zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, na przykład, współliniowość punktów $u_a$, $u_b$, $u_c$ przy ustalonym $d$.

Zgodnie ze wzorem (5), prosta $l_a$ przechodzi przez punkty $bd/2$ i $cd/2$; prosta $l_b$ przechodzi przez punkty $ad/2$ i $cd/2$, a prosta $l_c$ – przez $ad/2$ i $bd/2$. Stąd

$$u_a = g(bd/2, cd/2), \quad u_b = g(ad/2, cd/2), \quad u_c = g(ad/2, bd/2).$$

W takim razie, wobec (3),

$$\begin{aligned} u_a = g(bd/2, cd/2) &= \frac{(\overline{bd}/2)(cd/2) - (bd/2)(\overline{cd}/2)}{\overline{bd} - \overline{cd}} = \\ &= \frac{\bar{b}c|d|^2 - b\bar{c}|d|^2}{4\bar{d}(\bar{b} - \bar{c})} = \frac{d}{4}\left(\frac{\bar{b}c - b\bar{c}}{\bar{b} - \bar{c}}\right) = \\ &= (d/2) \cdot g(b, c) = (d/2) \cdot (bc/2) = bcd/4, \end{aligned}$$

i analogicznie $u_b = acd/4$, $u_c = abd/4$. Współliniowość trójki punktów $u_a$, $u_b$, $u_c$ wynika więc natychmiast ze współliniowości trójki $ab$, $ac$, $bc$ (stwierdzonej chwilę wcześniej). Dowód jest zakończony.