O „szczegółach technicznych" w rozwiązywaniu szkolnych zadań z teorii prawdopodobieństwa

Edward STACHOWSKI

W elementarnej (szkolnej) teorii prawdopodobieństwa istnieje wiele zadań, które uważane są za trudne, czasami nawet bardzo trudne.

Dlaczego? Wynika to z tego, że rozwiązujący je uczniowie, niekiedy również nauczyciele, łatwe zadanie potrafią doprowadzić do takiej postaci, że staje się ono bardzo skomplikowane, a trudne pozostaje nadal trudne.

Dzieje się tak dlatego, iż w rozwiązaniu zadania bierze się pod uwagę „techniczną" stronę zagadnienia. Szufladkuje się po prostu zadanie do określonego typu i dalej (często bezmyślnie) stosuje ogólnie przyjęty schemat rozwiązywania tego typu zadań.

Uważam więc, że należy poświęcić kilka słów temu problemowi. Postaram się pokazać Czytelnikom, jak skomplikować zadanie – czyli z łatwego zrobić trudne i odwrotnie, jak można uprościć problem – czyli z trudnego zadania zrobić łatwe. Oto kilka przykładów.

Zadanie 1
Z pojemnika, w którym znajduje się sześć kul białych oraz siedem czarnych, losujemy kolejno, bez zwracania, dwie kule. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A – druga wylosowana kula będzie biała.

Poznajmy wzorcowe rozwiązanie tego zadania.

Zdarzeniem elementarnym jest ciąg dwuelementowy, różnowartościowy, o wartościach w zbiorze trzynastoelementowym. Zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. (Jest to schemat klasyczny.)

$$|\Omega| = 13 \cdot 12 = 156,$$

gdzie $|\Omega|$ oznacza moc zbioru Ω,
Ω – zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych,
$A = A_1 \cup A_2$, gdzie:
A – druga wylosowana kula będzie biała,
A_1 – wylosowano dwie kule białe,
A_2 – pierwsza wylosowana kula będzie czarna, a druga biała,
$A_1 \cap A_2 = \emptyset$,
$|A_1| = 6 \cdot 5 = 30$, $|A_2| = 7 \cdot 6 = 42$,
$|A| = |A_1| + |A_2| = 72$.
$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{72}{156} = \dfrac{6}{13}$.

Zadanie 2
Z pojemnika opisanego w zadaniu 1 losujemy kolejno, bez zwracania, pięć kul. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A – piąta wylosowana kula będzie biała.

Nie będziemy tego zadania rozwiązywać w sposób ogólnie zalecany. Przeniesienie „wzorcowej" metody rozwiązania z zadania 1 spowoduje dużo komplikacji. (Zdarzenie A będzie sumą szesnastu zdarzeń – prawdopodobieństwo bezbłędnych obliczeń jest bliskie zera.)

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (VI)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Sztorm kwantowy

Tomasz HOFMOKL

Spotkaniom naszym nadałem ogólny tytuł: wbrew zdrowemu rozsądkowi. Nie dlatego, abym był zaciekłym przeciwnikiem zdrowego rozsądku. Jest to bardzo cenna cecha i szczególnie przydatna w życiu codziennym. Wyrabia się bowiem na podstawie doświadczeń i spostrzeżeń właśnie z życia codziennego. Celem moim jest uprzytomnienie Państwu, że oddalając się od obszarów doznań zwykłych dla codziennego życia musimy bardzo ostrożnie posługiwać się zdrowym rozsądkiem, ponieważ nie możemy zagwarantować jego uniwersalności.

Zacznijmy naszą historię w sztormowy dzień nad brzegiem morza. Wybierzmy wyjątkowo wietrzny dzień, w którym huragan gna bałwany ku brzegowi. Te zaś rozbijają się z hukiem o skaliste wybrzeże. Od czasu do czasu wyciu wichru i rykowi fal towarzyszy łoskot odrywających się skał. Obraz groźny, godny pędzla malarza marynisty. Chciałbym w tym obrazie zainteresować Państwa procesem fizycznym odrywania skał przez uderzające fale. Niewątpliwie trzeba do tego energii. Energię niesie fala wodna. Im większy bałwan, czyli mówiąc językiem fizycznym, im większa amplituda fali, tym większa energia uderzenia. Zależność jest nawet, jak się mówi, kwadratowa. Jeżeli amplituda fali wzrośnie dwukrotnie, jej energia wzrośnie czterokrotnie. Taki obraz fali padającej na brzeg jest nam bliski, bo poparty albo własnym doświadczeniem, albo łatwością wyobrażenia sobie tej sceny.

Wiemy już, że światło jest falą elektromagnetyczną, wiemy, że przenosi energię. Szczególnie dobrze to odczuwamy na plaży, gdy Słońce niemiłosiernie nas pali. Czy możemy spodziewać się sztormu słonecznego, w którym fale elektromagnetyczne uderzają o przeszkodę i wyrywają z niej elementy składowe?

Otóż takie zjawisko zaobserwowano już w roku 1887. Wtedy to Heinrich Rudolf

Hertz, w owym czasie profesor politechniki w Karlsruhe, badał oddziaływanie promieniowania nadfioletowego na wyładowania elektryczne. Promieniowanie nadfioletowe to niewidzialne dla oka promieniowanie o długości fali mniejszej niż długość fioletowych promieni z obszaru widzialnego. Promieniowanie to obecne w widmie słonecznym jest odpowiedzialne za nasze opalanie się. Hertz w swoim doświadczeniu zauważył, że przeskok iskry elektrycznej między cynkowymi kulkami iskiernika był znacznie łatwiejszy, jeżeli jedna z kulek była oświetlana światłem nadfioletowym. Wyjaśnienie zjawiska wydawało się stosunkowo proste. Światło jako fala elektromagnetyczna padało na powierzchnię cynku i udzielało swojej energii elektronom tak, że mogły się one oderwać od powierzchni metalu. Światło w takim obrazie wybija elektrony z metalu, tak jak fala morska odrywa w czasie sztormu kawałki skał. Nic więc dziwnego, że oderwane elektrony mogą jako iskra przelecieć do drugiej elektrody nawet przy niewielkim napięciu między kulkami. Stąd ułatwienie w przeskoku iskry.

Dotąd wszystko zdaje się być w zgodzie ze zdrowym rozsądkiem. Sprawa zaczęła się komplikować w miarę prowadzenia dokładniejszych badań tego zjawiska. Otóż już przed rokiem 1905 dzięki pracom niemieckiego fizyka Philippa Lenarda i innych autorów ustalono bardzo dziwną prawidłowość: energia kinetyczna wybijanych elektronów nie zależy od natężenia światła, ale od długości jego fali, czyli od koloru promienia. Im krótsza fala, czyli, jeżeli można obrazowo tak powiedzieć, im bardziej niebieskie jest światło, tym większą energię mają wybite elektrony. Natomiast liczba wybitych elektronów zależy od natężenia światła. To tak, jakby energia, z jaką wyrzucane są kawałki skał z nabrzeża morskiego, nie zależała od natężenia sztormu, ale za to zależała od tego, czy są to fale długie, oceaniczne, czy też krótsze, charakterystyczne dla płycizn. I to właśnie te krótkie fale robiłyby najwięcej szkody wyrywając z dużą energią kamienie z nabrzeża.

Omawiane zjawisko nazwano zjawiskiem fotoelektrycznym. Dokładne doświadczenia przeprowadzano oczywiście w lampie próżniowej, aby wybite elektrony nie napotykały na swojej drodze żadnych przeszkód i aby można było zmierzyć ich energię. Nie będę wchodził w szczegóły pomiarów. Zaufajmy badaczom

Jeżeli natomiast to zadanie rozwiązywać będziemy po sformułowaniu twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, to sprawa nieco się uprości. Mamy pięć hipotez: H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, gdzie H_i oznacza, że wśród pierwszych czterech kul będzie i kul białych, czyli też trzeba się będzie nieco narachować.

Przeanalizujmy treść obu zadań i zauważmy, że jest to jedno i to samo zadanie, różne są tylko „szczegóły techniczne". W obu przypadkach losujemy **jedną kulę ze zbioru trzynastu kul.** Na pytanie jak, odpowiemy nieco niegrzecznie: A co nas to obchodzi?

W obu zadaniach zdarzeniem elementarnym jest **podzbiór jednoelementowy** ze zbioru trzynastoelementowego (kul). **Zdarzenia elementarne są równoprawdopodobne** (symetria).
$|\Omega| = 13$, $|A| = 6$,
$P(A) = \frac{6}{13}$.

Jak widać, nie ma nic do roboty. (Czytelnik z łatwością wymyśli jeszcze kilkanaście wersji tego zadania podając bardziej wyrafinowane metody losowania.)

Przeanalizujmy teraz serię czterech zadań. (Seria ta może, oczywiście, być znacznie dłuższa. Dopisanie innych zadań pozostawiamy inwencji Czytelnika.)

Zadanie 3

Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A – wylosowana karta będzie koloru pikowego.

Zadanie 4

Z talii 52 kart losujemy dziesięć kart i chowamy je do lewej kieszeni nie oglądając. Następnie z pozostałych kart losujemy jedną. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A – wylosowana karta będzie koloru pikowego.

Zadanie 5

Talię 52 kart dzielimy na sześć części (kupek). W kupkach o numerach 1, 2, 3, 4, 5 ma być po osiem kart, a w ostatniej, o numerze 6 – dwanaście kart.
Rzucamy kostką, a następnie losujemy jedną kartę z kupki o numerze równym liczbie oczek otrzymanych na kostce. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A – wylosowana karta będzie koloru pikowego. (Rozpatrzyć przypadek kostki symetrycznej i niesymetrycznej.)

Zadanie 6

Talia 52 kart leżała na stole. Na skutek przeciągu (wiał wiatr północno-wschodni) pewna liczba kart spadła na podłogę. Z kart, które pozostały na stole, losujemy jedną. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A – wylosowana karta będzie koloru pikowego. (Czy to się da rozwiązać?)

Mamy nadzieję, Czytelniku, że nie dałeś się nabrać i zauważyłeś, że jest to wciąż to samo zadanie. (Oczywiście, najprostsza jego wersja to zadanie 3.) W każdym z tych zadań doświadczenie polega na losowaniu jednej karty z talii 52 kart. Możemy to losowanie przeprowadzić na wiele różnych, mniej lub bardziej wyrafinowanych sposobów („szczegóły techniczne"). W każdym przypadku, niezależnie od metody losowania, **zdarzeniem elementarnym jest podzbiór jednoelementowy** ze zbioru kart. **Zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne** (symetria) i, oczywiście,

$$P(A) = \frac{1}{4}. \blacksquare$$

Podaliśmy tu najprostszą wersję. Jeżeli będziemy losowali nie jedną kartę, lecz kilka, to sposób rozumowania nie ulegnie zmianie.

Kilkanaście lat temu można było zagrać na loterii „Błyskawica". Losy kupowało się w kiosku „Ruchu", o ile mnie pamięć nie myli, los kosztował 10 zł. Losy były trzech rodzajów:
wygrywające – na szybie kiosku naklejona była tabela z numerami losów wygrywających,
przegrywające – numerów tych losów nie było w tabeli,
neutralne – dające wygraną 10 zł. W tym przypadku losowaliśmy jeszcze raz za darmo.

Liczba losów była, oczywiście, bardzo duża. Aby nie męczyć się z dużymi liczbami, rozwiążmy zadanie o takiej loterii w wersji uproszczonej.

Zadanie 7
Na loterii jest 10 losów wygrywających, 50 przegrywających oraz 40 „neutralnych" – dających prawo do dalszej gry. Obliczyć prawdopodobieństwo wygrania przy zakupie jednego losu i wykorzystaniu wszystkich możliwości (tzn. przy zakupie losu „neutralnego" wybieramy następny los).

Przy standardowym rozwiazaniu tego zadania pierwszym problemem, z którym się spotykamy, jest określenie, co jest zdarzeniem elementarnym. Jeżeli poradzimy sobie z tym problemem (lub nie) i zaczniemy brutalnie liczyć, korzystając z faktu, że zdarzenie A polegające na wygraniu jest sumą parami rozłącznych zdarzeń A_i (A_i – $(i-1)$ pierwszych losów będą to losy „neutralne", los o numerze i będzie wygrywający), to otrzymamy wynik postaci

$$P(A) = \frac{10}{100} + \frac{40}{100}\cdot\frac{10}{99} + \frac{40}{100}\cdot\frac{39}{99}\cdot\frac{10}{98} + \ldots + \frac{40}{100}\cdot\frac{39}{99}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{61}\cdot\frac{10}{60}.$$

Ile to jest? Oczywiście, $P(A) = \frac{1}{6}$. Zapytacie, dlaczego? To proste. Zdarzeniem elementarnym jest **podzbiór jednoelementowy ze zbioru sześćdziesięcioelementowego** (doświadczenie polega na losowaniu jednego losu **spośród losów rozstrzygających**, tzn. wygrywających lub przegrywających, sposób losowania jest może nieco dziwny, ale odgrywają tu rolę względy psychologiczne – jest to „szczegół techniczny").

Zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne (symetria)

$$|\Omega| = 60, \qquad |A| = 10, \qquad P(A) = \frac{1}{6}. \blacksquare$$

Mam nadzieję, że po przeczytaniu tego artykułu Czytelnik będzie umiał oczyścić problemy, z którymi się spotyka, ze „szczegółów technicznych" i sprowadzić, zdawałoby się, trudne i skomplikowane zadanie do banalnego. Tego Mu serdecznie życzę.

i prześledźmy wynik typowego eksperymentu nie zaciemniając opisu tym, jak go wykonano.

Otóż zaopatrujemy się w lampę, która może wysyłać promienie o dowolnej długości fali. Przypominam, że długość fal z zakresu światła widzialnego leży w granicach 0,7 milionowej części metra (granica czerwieni) do 0,4 milionowej części metra (kraniec fiołkowy widma). Czyli od 0,7 do 0,4 mikronów. Wybieramy określoną długość fali, na przykład, nieco poniżej 0,7 mikronów i oświetlamy elektrodę pokrytą sodem. Taki metal wybrał w jednym ze swoich doświadczeń R.A. Millikan. Staramy się zmierzyć energię wybitych z sodu elektronów. Ale cóż to ? Nie mamy czego mierzyć, bo żadne elektrony nie zostają wybite. Możemy dowolnie zwiększać natężenie naszej lampy, a tu nic. Zmieniamy więc barwę światła skracając długość fali. Dalej nic. Dopiero gdy lampa zostanie nastawiona tak, aby wysyłać promienie krótsze niż 0,5 mikrona, pojawią się pierwsze elektrony. Może być ich nawet dużo, ale będą bardzo powolne. Zwiększanie natężenia światła zwiększy liczbę wybitych elektronów, ale nie zmusi ich, aby były szybsze. Dalsze skracanie długości światła padającego powoduje zwiększanie energii elektronów i to w sposób wprost proporcjonalny do częstości światła. Im większa zaś częstość, tym krótsza fala. Taki wynik doświadczenia jest całkowitym zaskoczeniem. Trudno sobie wyobrazić, jak i dlaczego tak się dzieje.

Na gruncie fizyki klasycznej, która świetnie wyjaśnia rozbijanie nabrzeża w czasie sztormu, nie można wyjaśnić zjawiska wybijania elektronów z materii pod wpływem padającego światła. Trzeba więc wyjść poza zwykły zdrowy rozsądek i zaproponować coś całkiem nowego. To coś zaproponował już Max Planck w roku 1900. Wyprowadził on wzór na promieniowanie ciał rozgrzanych, (faktycznie promieniowanie ciała doskonale czarnego) postulując, że energia promienista może być emitowana i pochłaniana tylko porcjami zwanymi kwantami. Zrobił to sam z wielką niechęcią uważając, że jego pomysł jest sprzeczny ze zdrowym rozsądkiem. Opowiadałem o tym poprzednim razem. Zwariowany pomysł był więc gotów. W roku 1905 Albert Einstein uczynił krok dalej. Jeżeli godzimy się na pochłanianie i emitowanie porcjami – kwantami energii promienistej, to dlaczego od razu nie powiedzieć, że wiązka światła składa się z porcji energii o wielkości: stała h pomnożona przez częstość promieniowania. Stała ta nosi nazwę stałej Plancka. Światło ma więc strukturę ziarnistą, jest strumieniem cząstek (kwantów) i równocześnie falą. No i co Państwo na to? Łatwo to sobie wyobrazić? Chyba nie.

Ale musimy uwierzyć doświadczeniu. Jeżeli przyjmiemy zwariowaną hipotezę kwantów światła, to zjawisko fotoelektryczne staje się łatwe do wyjaśnienia. Każdy z elektronów jest jakoś związany w metalu. Inaczej natychmiast by uciekł. Aby pokonać to związanie, trzeba dostarczyć pewnej energii zwanej pracą wyjścia. Nic więc dziwnego, że dopóty, dopóki energia kwantu nie jest dostatecznie duża, a więc długość fali dostatecznie mała, możemy naświetlać sobie metal do woli. Nie potrafimy dostarczyć w pojedynczej porcji dostatecznej energii na wyrwanie elektronu z metalu. Natężenie światła, a więc liczba porcji kwantów nic tu nam nie pomoże, bowiem jest niezwykle mało prawdopodobne, aby elektron równocześnie połknął dwa kwanty. Dopiero skracając dostatecznie długość fali światła padającego, czyli zwiększając częstość fali doprowadzimy do tego, że w jednym kwancie będzie zawarta energia dostateczna do wyrwania elektronu z metalu. Potem proces jest już zrozumiały. Im większa częstość fali (mniejsza długość), tym większa energia kinetyczna wybitego elektronu. Przyjęcie jednej, wydawałoby się, niedorzecznej hipotezy, wyjaśnia całe zjawisko.

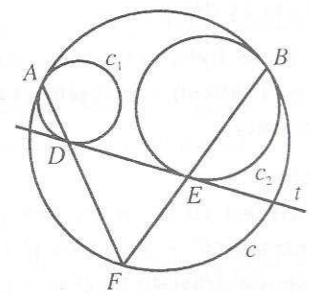
Może więc hipoteza nie była tak całkiem niedorzeczna? Uważnemu Czytelnikowi może się nasunąć pytanie, czy stała określająca wielkość porcji energii, czyli stała Plancka, którą wprowadzono aby wyjaśnić zjawisko promieniowania ciała doskonale czarnego, o którym mówiłem w poprzednim artykule, jest taka sama, jak stała potrzebna do wyjaśnienia zjawiska fotoelektrycznego. Warto sobie uświadomić, że próbujemy zrozumieć zjawiska, które pozornie nie mają ze sobą nic wspólnego. Z jednej strony badamy, jak zachowuje się rozgrzane ciało, a z drugiej, jakiemu prawu podporządkowują się elektrony wybijane przez światło z metalu. W obu doświadczeniach można wyznaczyć tę stałą, zwaną, jak mówiłem, stałą Plancka. Okazało się, że oba doświadczenia dają taki sam wynik liczbowy. To nas utwierdza jeszcze bardziej w tym, że pomysł Plancka,

Olimpiada Matematyczna Państw Bałtyckich

W dniach 5–9 listopada 1992 r., wraz z M. Bortnikiem, Ś. Galem, R. Łochowskim, R. Wojtczukiem oraz panami M. Bryńskim i H. Pawłowskim uczestniczyłem w Trzeciej Olimpiadzie Matematycznej Państw Bałtyckich, która odbyła się w Wilnie. W konkursie tym oprócz nas brały udział delegacje z Danii, Estonii, Islandii, Litwy, Łotwy, Szwecji i miasta Petersburg. Zawody miały charakter drużynowy. Odbyły się one 7 listopada, trwały 4 godziny, w ciągu których każda drużyna zmagała się z 20 zadaniami. Z wynikiem 73 pkt. zajęliśmy trzecie miejsce (za każde zadanie można było otrzymać 5 punktów) za drużyną Danii (83 pkt.) i miastem Petersburg (78 pkt.). Warto tu zaznaczyć, że Petersburg (dawny Leningrad) prowadzi własną olimpiadę, najstarszą spośród wszystkich turniejów i konkursów matematycznych organizowanych na terenie Wspólnoty Niepodległych Państw.

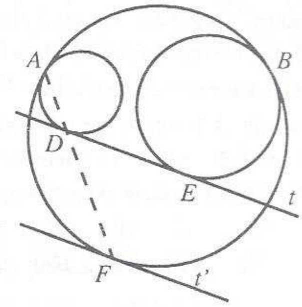
Poziom zawodów zilustrujmy jednym z zadań tej olimpiady.

Na płaszczyźnie dany jest okrąg C oraz nie przecinające się okręgi C_1 i C_2, styczne wewnętrznie do C w punktach A i B. Okręgi te leżą po jednej stronie prostej t stycznej do nich w punktach D i E. Wykazać, że proste AD i BE przecinają się w punkcie F leżącym na okręgu C.



Aby móc trafnie ocenić poziom zawodów, warto pokusić się o samodzielne rozwiązanie tego zadania, a dopiero potem zapoznać się z naszym rozwiązaniem:

Niech t' będzie taką styczną do okręgu C, równoległą do prostej t, że okręgi C_1 i C_2 nie leżą między prostymi t i t'. Punkt styczności prostej t' z okręgiem C oznaczmy przez F. Punkt A jest środkiem jednokładności okręgów C_1 i C.



Ponieważ proste t i t' są równoległe, więc przy jednokładności o środku A przekształcającej okrąg C_1 na C, punkt D przejdzie na punkt F. Stąd wniosek, że punkty A, D, F są współliniowe. Analogicznie dowodzimy, że punkty B, E, F są współliniowe – stąd teza.

Dziękujemy pani profesor Łucji Noniewicz i panu profesorowi Edwardowi Szpilewskiemu – matematykom pracującym na Litwie, oraz uczniom polskiej szkoły średniej nr 11 im. Adama Mickiewicza w Wilnie za zorganizowanie dla nas wielu interesujących wycieczek szlakiem polskich pamiątek.

Następna Olimpiada Matematyczna Państw Bałtyckich odbędzie się w listopadzie 1993 r. na Łotwie.

Waldemar POMPE

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 676. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=6\,. \end{cases}$$

Rozwiązanie na str. 11

M 677. Udowodnić, że dla dowolnego n naturalnego liczba $a_n = 2^{5n+1} + 5^{n+2}$ jest podzielna przez 27.

Rozwiązanie na str. 7

M 678. Wykazać, że wśród dwóch kolejnych liczb nieparzystych zawsze przynajmniej jedna nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Jarosław KULPA

F 363. Korzystając z analizy wymiarowej oszacować masę Wszechświata, wiedząc że można ją przedstawić jako wyrażenie zawierające stałą grawitacji G, prędkość światła c i stałą Hubble'a $\mathrm{H} = (18 \text{ mld lat})^{-1}$. Wyrazić tę masę w jednostkach masy atomu wodoru $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

Rozwiązanie na str. 13

F 364. Zegar atomowy umieszczono na sztucznym satelicie. W jakiej odległości od środka Ziemi musi krążyć ten satelita, aby jego zegar wskazywał ten sam czas, jaki pokazują zegary na Ziemi. (Czas w polu grawitacyjnym ulega spowolnieniu według wzoru: $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1+\frac{2\phi}{c^2}}$, gdzie ϕ oznacza potencjał grawitacyjny.)

Rozwiązanie na str. 13

potem rozwinięty przez Einsteina, zawiera głębszą ideę. A to, że komplikuje nam życie, że świat nie jest tak prosty, jak byśmy to sobie wyobrażali, to trudno. Można się cieszyć, że w trudzie, bo w trudzie, ale jednak potrafimy uchylić rąbka tajemnic przyrody. Każdy z nas wolałby aby świat był łatwiejszy do zrozumienia.

Chciałbym przytoczyć Państwu na zakończenie dwa krótkie cytaty. Aleksander Pope, poeta angielski, najwybitniejszy przedstawiciel klasycyzmu w literaturze angielskiej osiemnastego wieku, zafascynowany wielkością Newtona i jego dzieła napisał kiedyś:

Przyrodę i jej prawa
krył nocy cień
Rzekł Bóg „niech będzie Newton"
i nastał dzień.

Opis świata w wydaniu Newtona był jednak zbyt prosty, więc Sir John Squire, współczesny Einsteinowi, pisze:

Lecz szatan nie śpi,
nie trwało długo to
„Niech będzie Einstein"
i wrócił status quo.

Nie jest chyba tak źle. Na przyszły raz pomówimy o cząstkach, które są falami.