Twierdzenie o wiriale

Tomasz KWAST

Moment bezwładności jest miarą upakowania masy ciała sztywnego lub układu punktów materialnych względem jakiejś osi. Utwórzmy analogiczną wielkość opisującą rozkład masy względem punktu, nazywaną niekiedy „biegunowym" momentem bezwładności. Niech będzie to

$$J = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2),$$

gdzie x_i, y_i, z_i są współrzędnymi punktu o masie m_i względem środka masy układu, a sumowanie wykonuje się po wszystkich masach tworzących układ mechaniczny – mogą to być np. gwiazdy lub galaktyki w gromadzie.

Pomnóżmy równanie Newtona dla cząstki o masie m

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}} = \vec{F}$$

przez wektor $\vec{v}$ opisujący jej położenie w układzie inercjalnym

$$\vec{r}\vec{F} = r\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}}\vec{r} = \\ = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{r}\cdot\vec{v}) - m\vec{v}^2 .$$

Uśredniając w długim okresie czasu τ obie strony otrzymujemy

$$m\left\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{r}\cdot\vec{v})\right\rangle = \langle\vec{F}\cdot\vec{r}\rangle + \langle m\vec{v}^2\rangle .$$

Jeśli cząstka porusza się w ograniczonym obszarze przestrzennym ze skończoną prędkością, to $\vec{r}\cdot\vec{v}$ ma również skończoną wartość i

$$\left\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{r}\cdot\vec{v})\right\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{r}\cdot\vec{v}\mathrm{d}\tau) = \\ = \frac{1}{\tau}(\vec{r}\cdot\vec{v})\Big|_0^\tau \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0 .$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{1}{2}m\langle\vec{v}^2\rangle = \langle E_k\rangle = -\frac{1}{2}\langle\vec{F}\cdot\vec{r}\rangle .$$

Zmianę J w czasie można w naturalny sposób interpretować jako ogólne zapadanie się lub pęcznienie gromady. Obliczmy drugą pochodną względem czasu tej wielkości:

$$\ddot{J} = 2\sum m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + 2\sum m(x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z}),$$

gdzie dla prostoty zapisu pominęliśmy wskaźniki i. Pierwszym składnikiem jest jak widać, pomnożona przez 4 energia kinetyczna układu, a drugim pomnożony też przez 4 tytułowy wiriał. Jeżeli wprowadzimy potencjał oddziaływań Φ, określony tak, aby zachodziło $m_i\ddot{x}_i = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_i}$ (i podobnie dla y i z), to dalej otrzymamy:

$$\ddot{J} = 2\sum mv^2 - 2\sum\left(x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + y\frac{\partial\Phi}{\partial y} + z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = 4E_k + 2\Phi,$$

gdzie $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ to prędkości gwiazd, a E_k oznacza energię kinetyczną gromady. W celu dokonania ostatniego przekształcenia skorzystaliśmy jeszcze z twierdzenia Eulera (margines) dla potencjału grawitacyjnego. Dla układu punktów materialnych jest on bowiem określony jako

$$\Phi = -\frac{1}{2}\mathrm{G}\sum_{i,j}\frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

gdzie r_{ij} oznacza odległość masy m_i od masy m_j, G stałą grawitacji, a sumowanie wykonuje się po wszystkich parach wskaźników (oczywiście, z wyjątkiem $i = j$). Łatwo zauważyć zarówno jednorodność potencjału, jak i rząd jednorodności.

Funkcję $f(x, y, z)$ przykładowo trzech zmiennych x, y i z nazywamy jednorodną rzędu m, jeżeli $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$. Twierdzenie Eulera o funkcjach jednorodnych głosi, że dla takich funkcji zachodzi równość

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = kf .$$

Potencjał grawitacyjny Φ, jak łatwo widać, jest funkcją jednorodną rzędu -1.

Wyprowadzony tu wzór na $\ddot{J}$ dowodzi, że jeżeli biegunowy moment bezwładnośc układu punktów materialnych jest stały lub zmienia się w czasie liniowo, to suma energii potencjalnej i podwojonej kinetycznej tego układu równa się żeru. To właśnie jest treścią twierdzenia o wiriale:

$$2E_k + \Phi = 0.$$

Twierdzenie to bywa często stosowane np. w dynamice układów gwiazdowych, przy czym, spójrzmy prawdzie w oczy, nie zawsze jest to do końca uzasadnione. Na usprawiedliwienie trzeba przyznać, że właściwie niemożliwe jest sprawdzenie, czy biegunowy moment bezwładności gromady gwiazd lub galaktyk zmienia się w czasie dokładnie tak, jak wymaga tego założenie twierdzenia. Przyjmujemy więc, że jest ono spełnione przynajmniej w przybliżeniu, np. że w małym przedziale czasu gromada jest w ogóle stabilna itp., bo w gruncie rzeczy jest to jedyne, co można zrobić chcąc twierdzenie zastosować.

A pożytek z niego może być niemały. Zakładając np., że jest ono spełnione dla gromady galaktyk, można oszacować przeciętną masę galaktyki. Pomierzyć wprawdzie możemy tylko rzuty wzajemnych odległości galaktyk na sferę niebieską oraz ich prędkości radialne. Jeżeli jednak gromada ma budowę regularną, to można z tych obserwacji odtworzyć średnie odległości i prędkości przestrzenne galaktyk (patrz *Delta* 7/1989), tj. wielkości wchodzące do twierdzenia o wiriale, a stąd znaleźć średnią masę galaktyki. Niezgodność tak wyznaczonych średnich mas galaktyk z ocenianymi na podstawie ich jasności (oceny dynamiczne dają z reguły masy większe) można interpretować dwojako: albo wyraźnie nie są spełnione założenia twierdzenia (gromada silnie ekspanduje), albo oprócz galaktyk w gromadach znajduje się inna niewidoczna materia. Obecnie wszystko wskazuje na to, że zachodzi ta druga ewentualność.

Weźmy inny przykład. Zapadający się obłok wodorowy to też układ wielu punktów materialnych, a jego energia kinetyczna jest w istocie termiczną energią obłoku i wynosi

$$E_k = \frac{1}{2}Nmv^2 = \frac{3}{2}N\mathrm{k}T,$$

gdzie N jest liczbą cząstek o masie m w obłoku, T jego średnią temperaturą, a k oznacza stałą Boltzmanna. Ostatnia równość została tu napisana na mocy znanego z termodynamiki faktu, że w stanie zbliżonym do równowagi średnia energia kinetyczna cząstki gazu wynosi $\frac{3}{2}\mathrm{k}T$. Jeżeli przyjąć, że dla tego obłoku również spełnione jest twierdzenie o wiriale, to całkowita jego energia jest równa

$$E = E_k + \Phi = -E_k = -\frac{3}{2}N\mathrm{k}T.$$

Energia ta, jak widać, jest ujemna – nic w tym dziwnego, bowiem obłok jest układem „związanym". Ma to dalsze konsekwencje. Mianowicie, gdy taki obiekt traci swoją energię, a jest nią tylko energia mechaniczna (to ważne!), to musi się ogrzewać! Inaczej mówiąc, ma on ujemne ciepło właściwe. Ten niezwykle prosty model opisuje więc zasadniczy proces zachodzący w trakcie ewolucji protogwiazdy, czyli obiektu, który już świeci, ale jeszcze nie uruchomił w sobie reaktora jądrowego.

Tak więc twierdzenie o wiriale bywa dość skutecznym narzędziem badawczym, nawet jeżeli warunki jego stosowalności traktuje się z lekkim przymrużeniem oka.