

Komplementarność

Marek CINAL

i Berthold-Georg ENGLERT

W mechanice klasycznej stan obiektu fizycznego jest opisany w pełni przez podanie wartości zmiennych dynamicznych charakteryzujących ten obiekt; w przypadku wyidealizowanego punktu materialnego tymi zmiennymi są: położenie punktu $\vec{r} = (x, y, z)$ i jego pęd $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$. Znając wszystkie siły działające na ten punkt materialny można, na podstawie praw Newtona, przewidzieć jego stan w dowolnej chwili w przeszłości i przyszłości. Tego typu przewidywanie nie jest możliwe dla obiektów mikroskopowych, np. atomów lub cząstek elementarnych, gdyż w świecie mikroskopowym nie jest możliwe jednoczesne określenie dokładnego położenia i pędu cząstki. Opisuje to kwantowo-mechaniczna relacja nieokreśloności Heisenberga

$$(*) \quad \delta x \delta p_x \geq \hbar/2,$$

gdzie δx (δp_x) jest dokładnością pomiaru składowej położenia x (składowej pędu p_x), $\hbar = h/(2\pi)$, h oznacza stałą Plancka. W teorii zjawisk mikroskopowych – mechanice kwantowej – stan cząstki opisuje się nie przez podanie wartości \vec{r} i \vec{p} , lecz przez podanie funkcji falowej $\varphi(\vec{r})$ określającej amplitudę prawdopodobieństwa znalezienia się cząstki w punkcie \vec{r} . Mierzalne wielkości fizyczne są reprezentowane wtedy przez operatory działające w przestrzeni funkcji falowych.

Mówimy, że dwie wielkości fizyczne są **komplementarne**, jeśli dokładna znajomość jednej z nich implikuje jednakowe prawdopodobieństwo każdego wyniku pomiaru drugiej. Przykładem wielkości komplementarnych są x i p_x . Wynika to w szczególności z relacji nieokreśloności (*). W przypadku ustalonego położenia cząstki pomiar jej pędu może dać dowolną wartość. I odwrotnie: cząstka o ustalonym pędzie może znajdować się w dowolnym punkcie. Oznacza to, że w zależności od tego, co z nią robimy, ujawnia swoje cechy korpuskularne (gdy dobrze określone jest jej położenie) lub falowe (gdy dobrze znamy jej pęd). Własność ta, nazywana korpuskularno-falowym charakterem materii, bywa często identyfikowana z komplementarnością. Komplementarność to jednak pojęcie znacznie ogólniejsze.

Sformułujmy teraz zasadę komplementarności.

Dla każdego stopnia swobody zmienne dynamiczne stanowią parę wielkości komplementarnych.

Można ją również bardziej swobodnie wyrazić następująco:
Niezależnie od tego, jak przygotowano układ, istnieje taki pomiar, którego wyniku zupełnie nie można przewidzieć.

Komplementarność jest własnością natury i, choć wydaje się niezgodna z naszym codziennym doświadczeniem, musimy jej istnienie przyjąć jako fakt. Największą zasługę w uświadomieniu nam tej fundamentalnej prawdy należy niewątpliwie przypisać Nielsowi Bohrowi. Nie przyszło mu to wcale łatwo, jednym z głównych oponentów był sam Albert Einstein.

Punkty szczególne trójkąta

Jarosław GÓRNICKI

W geometrii elementarnej na płaszczyźnie dwie figury odgrywają bardzo ważną rolę – trójkąt i koło. Przedstawię kilka faktów dotyczących trójkątów, które to fakty stanowią fragment tzw. *geometrii trójkąta*.

Od dawna znane są własności przecinania się w jednym punkcie:

- symetrycznych trzech boków trójkąta,
- dwusiecznych trzech kątów wewnętrznych trójkąta,
- prostych zawierających wysokości trójkąta,
- środkowych trzech boków trójkąta.

W 1803 roku Klügel nadał tym i podobnym im punktom nazwę *punkty szczególne trójkąta*, gdyż każdy z nich jest wyznaczony przez większą liczbę warunków, niż jest to potrzebne do jednoznacznego wyznaczenia punktu. Mianowicie, każdy z powyższych punktów wyznaczony jest przez trzy proste, mimo że punkt jest jednoznacznie wyznaczony przez dwie. Później termin ten rozszerzono również na inne punkty trójkąta wyróżnione przez jakąś własność, np. ekstremalną, pewnych funkcji związanych z trójkątem. Takimi punktami są na przykład:

- punkt Torricellego, dla którego suma odległości od wierzchołków trójkąta osiąga minimum;
- punkt Lemoine'a, dla którego suma odległości od wszystkich trzech boków trójkąta osiąga minimum;
- punkty Brocarda (mogą być dwa) mające tę własność, że trójkąty o wierzchołkach będących rzutami prostopadłymi tych punktów na poszczególne boki danego trójkąta są do niego podobne oraz mają najmniejsze pole wśród wszystkich trójkątów wpisanych w dany trójkąt i podobnych do trójkąta wyjściowego.

Jak te punkty wyznaczyć?

Wskażemy metodę pozwalającą na niemal jednoczesne uzasadnienie wymienionych na samym początku czterech faktów. W tym celu zaprezentujemy łatwe do zapamiętania twierdzenia dwojakiego rodzaju: opisujące warunki, przy których kilka wyróżnionych punktów (więcej niż dwa) leży na jednej prostej; oraz warunki gwarantujące, że kilka wyróżnionych prostych (więcej niż dwie) przecina się w jednym punkcie.

Około 80 r.n.e. Menelaus z Aleksandrii wykazał:

Twierdzenie 1. Jeżeli prosta nie przechodząca przez żaden wierzchołek trójkąta ABC przecina jego boki AB , BC , CA lub ich przedłużenia odpowiednio w punktach M , N , P , to

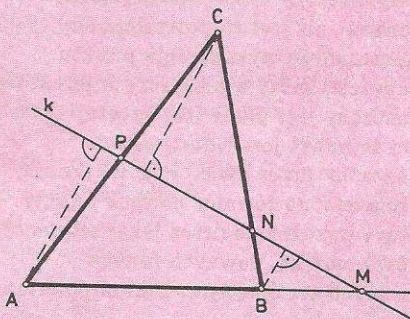
$$(1) \quad \frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BN|}{|NC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|} = 1.$$

Dowód. Prowadzimy prostą k zgodnie z warunkami twierdzenia. Z wierzchołków trójkąta ABC prowadzimy odcinki prostopadłe do prostej k (rys. 1, 2), których długości wynoszą odpowiednio d_A , d_B , d_C . Korzystając z twierdzenia Talesa mamy:

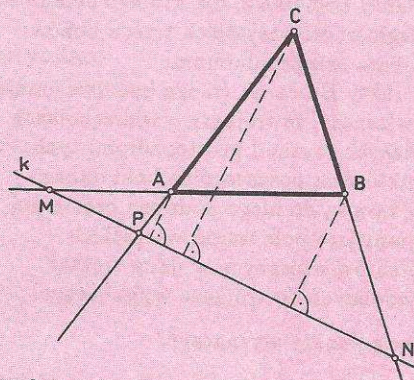
$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{d_A}{d_B}, \quad \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{d_B}{d_C}, \quad \frac{|CP|}{|PA|} = \frac{d_C}{d_A},$$

a stąd

$$\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BN|}{|NC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|} = 1. \quad \blacksquare$$



Rys. 1



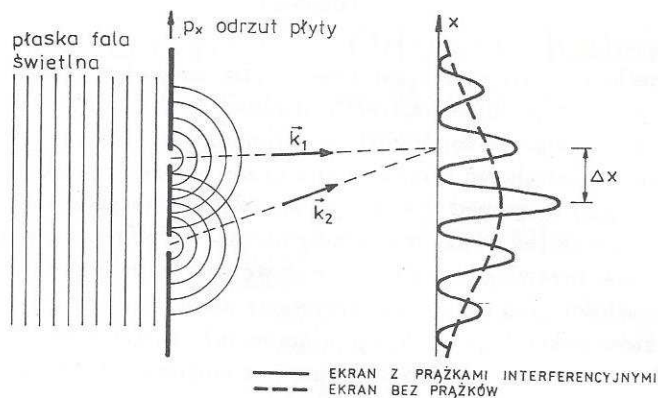
Rys. 2

Prawdziwe jest również, łatwe do udowodnienia, twierdzenie odwrotne: Niech na prostych AB , BC , CA leżą odpowiednio punkty M , N , P , z których żaden nie jest wierzchołkiem trójkąta ABC . Jeśli wyznaczają one odcinki spełniające warunek (1) oraz parzysta ich liczba leży na bokach trójkąta, to punkty M , N , P leżą na jednej prostej.

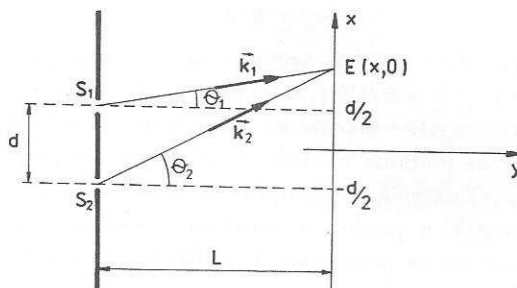
Czy komplementarność zawsze jest wymuszana przez zasadę nieokreśloności lub jej jakiś wariant?

Klasycznym przykładem, przy tej okazji omawianym w podręcznikach i na wykładach, jest doświadczenie myślowe Einsteina-Bohra (rys. 1).

a)



b)



Rys. 1 Schemat eksperymentu Einsteina-Bohra. Ponieważ długość fali świetlnej λ nie zmienia się, zatem $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = \frac{2\pi}{\lambda} \equiv k$. Składowe obu wektorów falowych wynoszą (dla $l \gg d$):

$$k_x^{(i)} = k \sin \theta_i \approx k \theta_i \approx k \frac{x + s_i d/2}{L},$$

$$k_y^{(i)} = k \cos \theta_i \approx k \left(1 - \frac{1}{2} \theta_i^2\right) \approx k \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x + s_i d/2}{L}\right)^2\right], \quad i = 1, 2,$$

gdzie $s_1 = -1$, $s_2 = 1$. Stąd mamy

$$(**) \quad \Delta k_x = k_x^{(2)} - k_x^{(1)} = \frac{kd}{L}.$$

Faza fali kulistej rozchodzącej się od i -tej szczeliny wynosi w punkcie E na ekranie

$$\phi_i = \vec{k}_i \cdot \vec{S}_i \vec{E} = k_x^{(i)}(x + s_i d/2) + k_y^{(i)} L.$$

Zatem różnica obydwu faz równa się

$$\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{kd}{L} x.$$

$\Delta \phi = 0$ w punkcie centralnego maksimum: $x = 0$. Zwiększając x od 0 do Δx znajdziemy się w punkcie pierwszego boczego maksimum, gdzie $\Delta \phi = 2\pi$. Stąd

$$\Delta x = \frac{2\pi L}{kd},$$

a następnie korzystając z (***) otrzymujemy

$$\Delta k_x \Delta x = 2\pi.$$

A więc pęd fotonu (składowa x -owa), który dotarł do punktu E na ekranie przelatując przez szczelinę S_2 , będzie się różnił od pędu fotonu, który dotarł tam przez szczelinę S_1 , o wielkość

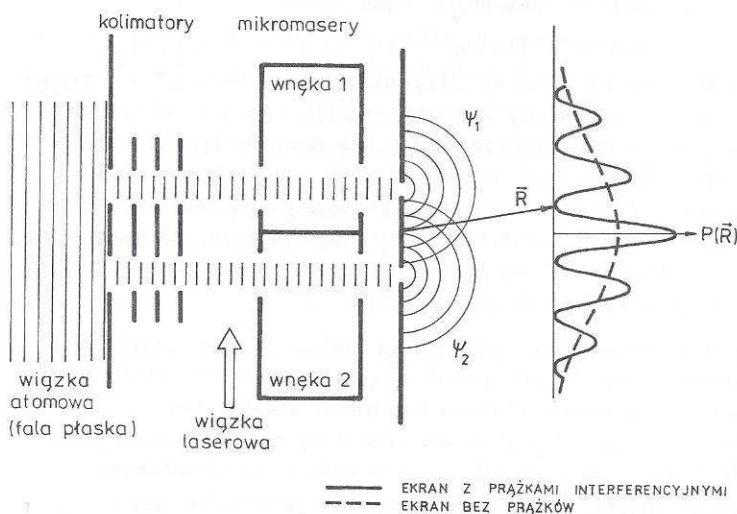
$$\Delta p_x = \hbar \Delta k_x = \frac{\hbar}{\Delta x}.$$

A zatem, aby odróżnić jedną drogę fotonu od drugiej, pęd płyty musi być wyznaczony z błędem mniejszym niż ta różnica, tzn. $\delta p_x \ll \hbar/\Delta x$. Wówczas jednak z zasady nieokreśloności (*) wynika, że nieokreśloność położenia płyty δx jest większa od Δx , czyli odległości między sąsiednimi prążkami interferencyjnymi. To jednak oznacza sprzeczność, gdyż warunkiem koniecznym powstania obrazu interferencyjnego jest $\delta x < \Delta x$.

Pojedyncze fotony (lub elektrony) po przejściu przez układ otworów w przesłonie tworzą na ekranie charakterystyczny układ prążków interferencyjnych. Wydawać by się mogło, że obserwując kierunek odrzutu przesłony na skutek zmiany kierunku lotu fotonu (lub elektronu) od źródła do ekranu, można bez zniszczenia obrazu interferencyjnego stwierdzić, przez który otwór przeszedł foton (lub elektron). Do tego potrzebna jest jednak dokładna znajomość pędu przesłony. Zasada nieokreśloności (*) wymaga wtedy dużej nieokreśloności jej położenia. Wówczas nieokreśloność ta staje się większa od odległości między sąsiednimi prążkami interferencyjnymi i obraz interferencyjny ginie.

Odpowiedź na postawione powyżej pytanie, czy komplementarność wynika z relacji nieokreśloności, powinna jednak brzmieć: nie!

W powyższym eksperymencie, gdy chcemy zarejestrować, przez który otwór przeszedł foton (lub elektron), przesłona zaburza jego ruch w sposób przypadkowy i niekontrolowany. Od niedawna umiemy jednak konstruować takie detektory, które nie zaburzają istotnie ruchu obserwowanych obiektów. Detektorem takim może być wnęka rezonansowa mikromasera, a obiektami atomy. Rozważmy teraz układ eksperymentalny przedstawiony schematycznie na rysunku 2.



Rys. 2. Zmodyfikowany eksperyment Einsteina-Bohra, pozwalający na określenie drogi fotonu bez zaburzenia jego ruchu.

Atomy po przejściu przez układ kolimatorów (szerokich szczelin) są oświetlane wiązką laserową, a następnie przelatują przez jedną z dwu mikromaserowych wnęk rezonansowych, po wyjściu z której trafiają na odpowiadającą jej szczelinę w płycie. Atomy są rejestrowane na ekranie ustawionym za płytą. W nieobecności lasera i wnęk rezonansowych tworzy się znany obraz interferencyjny. W obszarze za płytą funkcja falowa φ opisująca ruch środka masy atomu jest sumą dwu członów odpowiadających dwóm szczelinom: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Wówczas gęstość prawdopodobieństwa $|\varphi|^2$ znalezienia atomu w danym punkcie ekranu wynosi

$$|\varphi|^2 = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + \varphi_1^* \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2^*.$$

Wyrażenia $\varphi_1^* \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2^*$ są, oczywiście, odpowiedzialne za powstanie charakterystycznych prążków interferencyjnych.

Posługując się twierdzeniem Menelausa możemy uzasadnić ważny rezultat z geometrii trójkąta. Opublikował go w pracy *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* (Milano, 1678) włoski inżynier Giovanni Ceva.

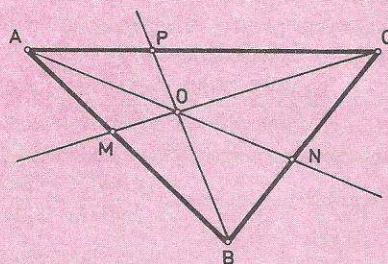
Twierdzenie 2. Jeżeli trzy proste przechodzące przez wierzchołki trójkąta ABC i nie zawierające żadnego boku trójkąta przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe, to odcinki wyznaczone przez punkty M, N, P (punkty przecięcia się tych prostych odpowiednio z bokami AB, BC, CA lub ich przedłużeniami) spełniają warunek (1).

Dowód. Gdy proste przecinają się w jednym punkcie, to przy powyższych oznaczeniach (rys. 3, 4) stosujemy twierdzenie Menelausa do trójkąta ABP i prostej CO :

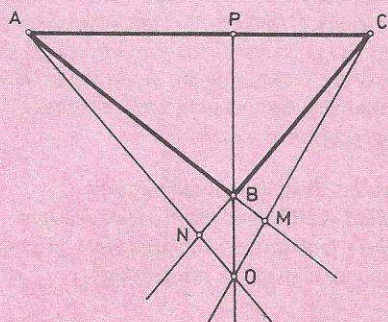
$$\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BO|}{|OP|} \cdot \frac{|PC|}{|CA|} = 1;$$

oraz do trójkąta BCP i prostej AO :

$$\frac{|PO|}{|OB|} \cdot \frac{|BN|}{|NC|} \cdot \frac{|CA|}{|AP|} = 1.$$



Rys. 3



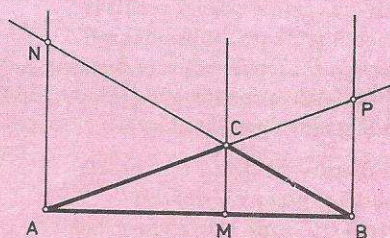
Rys. 4

Mnożąc te równości stronami otrzymujemy (1). Gdy $AN \parallel BP \parallel CM$ (rys. 5), to

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AN|}{|NB|}, \quad \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|BP|}{|PC|},$$

$$\frac{|CP|}{|PA|} = \frac{|CM|}{|MA|},$$

skąd po wymnożeniu stronami otrzymujemy (1). ■



Rys. 5

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 3. Jeżeli trzy proste przechodzące przez wierzchołki trójkąta ABC i nie zawierające żadnego boku trójkąta wyznaczają na bokach AB , BC , CA lub ich przedłużeniach takie punkty M , N , P , że spełniony jest związek (1) oraz nieparzysta ich liczba leży na bokach trójkąta, to proste te przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

Dowód. Załóżmy, że proste AN i BP przecinają się w punkcie O i prosta CM nie zawiera punktu O . Wtedy prosta CO wyznacza na prostej AB punkt $M' \neq M$. Wówczas z twierdzenia Cevy

$$\frac{|AM'|}{|M'B|} \cdot \frac{|BN|}{|NC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|} = 1$$

i jednocześnie spełniony jest warunek (1).

Porównując je, dostajemy $\frac{|AM'|}{|M'B|} = \frac{|AM|}{|MB|}$,

czyli $\frac{|AM'|}{|AM|} = \frac{|M'B|}{|MB|}$. Ostatnia równość

jest fałszywa, gdyż jeden ułamek jest mniejszy od 1, a drugi większy od 1.

Równie łatwo zauważamy: jeżeli $AN \parallel BP$, to również CM jest do nich równoległa. ■

Zobaczmy teraz, jak można wykorzystać te rezultaty do uzasadnienia na pozór odległych faktów.

Fakt 1. Trzy dwusieczne kątów trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie (jak łatwo zauważyć, jest to środek okręgu wpisanego w ten trójkąt).

Dowód. Dwusieczna kąta B (rys. 6) dzieli bok CA punktem P na odcinki spełniające warunek $\frac{|CP|}{|PA|} = \frac{|CB|}{|BA|}$.

Wynika to z twierdzenia Talesa zastosowanego do kąta C przeciętego prostymi równoległymi AD i BP oraz z faktu, że $|AB| = |BD|$. Analogicznie $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$, $\frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$,

a stąd wynika (1). Korzystamy teraz z twierdzenia 3 (odwrotnego do twierdzenia Cevy) i już! ■

W przypadku atomów możemy wykorzystać jeszcze dodatkowe stopnie swobody związane ze strukturą atomu. Możemy wiązką laserową pobudzić atomy z ich stanu podstawowego do stanu wzbudzonego. Gdy jeden z takich wzbudzonych atomów dostanie się do wnęki rezonansowej mikromasera, to może wystąpić silne sprzężenie z promieniowaniem w jej wnętrzu, w wyniku czego atom wyemituje foton i przejdzie do innego stanu. To przejście z emisją fotonu można obecnie przeprowadzić z prawdopodobieństwem praktycznie równym 1, nawet jeśli wnęka początkowo nie zawierała żadnego fotonu (mówimy, że wnęka była ultrazimna). Zatem po przejściu wzbudzonego atomu przez wnękę zostaje po nim ślad – foton. Wnęka jest więc detektorem przelotu atomu. Warto podkreślić, że proces oddziaływania atomu z polem wnęki i emisja fotonu nie zakłócają w znaczącym stopniu części funkcji falowej atomu związanej z ruchem jego środka masy.

Wróćmy do układu eksperymentalnego z dwiema ultrazimnymi wnękami rezonansowymi. Po przelocie pojedynczego atomu pełna funkcja falowa za przesłoną jest teraz następująca

$$\varphi = \varphi_1 \chi_{10} + \varphi_2 \chi_{01},$$

gdzie nowe czynniki χ_{10} i χ_{01} opisują stany wnęk rezonansowych; indeks 0 lub 1 na pierwszym miejscu oznacza, że w pierwszej wnęcie nie ma (0) lub jest (1) foton, indeks na drugim miejscu opisuje stan drugiej wnęki. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia się atomu w danym punkcie na ekranie jest teraz postaci

$$|\varphi|^2 = |\varphi_1 \chi_{10}|^2 + |\varphi_2 \chi_{01}|^2 + \varphi_1^* \varphi_2 \chi_{10}^* \chi_{01} + \varphi_1 \varphi_2^* \chi_{10} \chi_{01}^*.$$

Ponieważ stany χ_{10} i χ_{01} są ortogonalne, to wielkość $\chi_{10}^* \chi_{01}$ zeruje się, interferencyjne człony krzyżowe znikają, zatem na ekranie nie pojawiają się prążki interferencyjne. Nie ma przy tym znaczenia, czy foton, który pozostał w jednej z wnęk po przelocie każdego atomu, został zarejestrowany przez kogoś czy nie. Może wcale nie być obserwowany lub zaobserwowany długo po tym, jak atom dotarł do ekranu. Istotne jest to, że informacja (w postaci fotonu) o tym, którą drogę wybrał atom, jest dostępna.

Wnęki mikromasera nie wpływają na funkcje φ_1 i φ_2 określające ruch środka masy. W ten sposób osiągnięty został cel Einsteina: możliwe jest uzyskanie informacji o drodze obiektu bez niekontrolowanego oddziaływania aparatury pomiarowej na jego pęd. Bohr nie miałby jednak nic przeciwko temu rezultatowi, gdyż po pozostawieniu informacji o drodze atomu (to jest po emisji fotonu we wnęcie) atom traci zdolność do interferencji. Komplementarność jest więc znowu obecna; nie jest ona w tym przypadku wymuszona przez relację nieokreśloności Heisenberga, lecz przez korelację między stanem aparatury pomiarowej a obserwowanym obiektem. Relacja nieokreśloności Heisenberga (*) nie stosuje się tutaj; nasza argumentacja nie odwołuje się do niej. Fizycznie oznacza to, że relacji tej nie podlega użyty sposób detekcji, gdyż ze zlokalizowanym fotonem we wnęcie nie można związać określonego pędu.

I jeszcze uwaga o mikromaserach. Mogą one służyć jako detektory drogi atomów, jeśli jeden foton pozostawiony we wnęcie zmieni pole elektromagnetyczne na tyle, że zmiana ta jest obserwowalna. Z taką sytuacją mamy do czynienia w rozważanym wyżej przypadku ultrazimnych wnęk nie zawierających początkowo fotonów. Gdy wnęki zawierają początkowo klasyczne pole mikrofalowe, a więc mnóstwo fotonów, zmiana pola o jeden foton nie jest zauważalna. Eksperymenty z ultrazimnymi wnękami rezonansowymi są prowadzone już od kilku lat, ale idea doświadczenia przedstawiona w tym artykule ciągle czeka na realizację.