

Rozpad promieniotwórczy sukcesywny i jego model hydrodynamiczny

Stanisław BEDNAREK

Wszystkie izotopy pierwiastków występujących w przyrodzie można podzielić na dwie grupy – izotopy trwałe oraz nietrwałe. Te drugie ulegają rozpadowi promieniotwórczemu. Wśród powstających w wyniku tego produktów mogą znajdować się izotopy trwałe lub nietrwałe. Izotopy nietrwałe ulegają kolejnemu rozpadowi i wtedy mamy do czynienia z rozpadem promieniotwórczym sukcesywnym. Powstające w tym rozpadzie izotopy tworzą tzw. szereg promieniotwórczy. W przyrodzie występują cztery naturalne szeregi promieniotwórcze – uranu, toru, aktynu i neptunu. Ich nazwy pochodzą od nazw pierwiastków, od których zaczynają się te szeregi.

Bezpośrednie badanie rozpadu promieniotwórczego w warunkach domowych, czy nawet szkolnych, nie jest łatwe. Potrzebna jest do tego celu specjalna aparatura, a poza tym istnieje niebezpieczeństwo napromieniowania eksperymentatora.

W sytuacji, gdy prowadzenie badań na rzeczywistych obiektach jest niemożliwe, trudne lub niebezpieczne, fizycy i technicy chętnie wykorzystują modele, które powinny odzwierciedlać interesujące nas cechy obiektów rzeczywistych. Podobnie postąpimy również z rozpadem promieniotwórczym sukcesywnym. Zastosujemy całkowicie bezpieczny i łatwy do zbudowania w warunkach domowych model hydrodynamiczny. Wykorzystamy w tym modelu ilościową analogię zależności od czasu wysokości słupa cieczy wypływającej przez poziomą rurkę z cylindrycznego pionowo ustawionego naczynia i liczby jąder izotopu, które nie uległy jeszcze rozpadowi. Ograniczymy się przy tym do szeregu promieniotwórczego złożonego z trzech izotopów. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, aby opisywać i modelować szeregi dłuższe, w których występuje większa liczba izotopów.

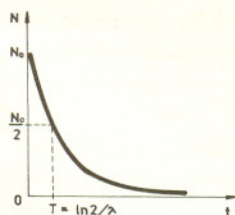
Rozpatrzmy najpierw wspomnianą analogię. Liczba jąder izotopu dN , która ulega rozpadowi w bardzo krótkim przedziale czasu dt , jest wprost proporcjonalna do pozostałej jeszcze liczby jąder N i zależy od rodzaju izotopu, co charakteryzuje stała rozpadu λ . Jest to prawo rozpadu promieniotwórczego. Można je zapisać równaniem

$$(1) \quad dN = -\lambda N dt.$$

Znak minus informuje o tym, że liczba jąder maleje. Czytelnicy, którzy poznali rachunek różniczkowy, mogą sprawdzić, że rozwiązaniem równania (1), przy warunku początkowym $N(0) = N_0$ jest funkcja wykładnicza

$$(2) \quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Wykres tej funkcji jest przedstawiony na rysunku 1.



Rys. 1

Jak pęcznieje wąż ogrodowy

Andrzej SZYMACHA

Mam na działce długi, gumowy, czarny wąż połączony z pompą elektryczną z jednego końca i zaopatrzony w zawór na drugim końcu. Wąż służy do podlewania, ale także do grzania wody w pogodny dzień. Stąd znam dokładnie objętość wody w wężu – 12 l (to dużo – można spokojnie wziąć prysznic). Wąż ten służy także jako minihydrofor. Po wyłączeniu pompy (przy zamkniętym zaworze) wąż jest nabrzmiały i wyrzuca z siebie do 3 l wody (to też sporo – można wielokrotnie opłukać ręce bez włączania pompy). Innymi słowy, pod ciśnieniem pompy (około 2 atm) objętość węża przyrasta o 1/4. To jest fakt wzięty z **obserwacji**. Objętość cylindra, jaki stanowi wąż, jest iloczynem pola przekroju i długości. Zaintrygowało mnie któregoś dnia w jakim stopniu owe 25% bierze się ze wzrostu pola przekroju, a w jakim ze zwiększenia długości węża. Gdyby rozdymała się kostka, to ponieważ $1,25 \approx 1,077^3$, każdy wymiar liniowy zwiększyłby się o około 8%. Przy długości mojego węża – 60 m, 8% to prawie 5 m – zmiana bardzo wyraźna, łatwa do zauważenia. Tymczasem pomiar wydłużenia po napompowaniu węża wykazał w ramach dokładności po prostu... zero! Skoro analiza wymiarowa prowadzi do oszacowania wydłużenia rzędu długości węża, czyli metrów, a w praktyce są co najwyżej centymetry, to w problemie musi być jakiś mały bezwymiarowy parametr. Z pewnym fałszywym poczuciem zrozumienia wiązałem go zrazu z dysproporcją wymiaru średnicy węża i jego długości, ale coś mnie gryzło, że to nie tak i zacząłem się nad tym dokładniej zastanawiać.

Aby wyjaśnić **obserwację**, musimy odwołać się do prawa Hooke'a. Prawo Hooke'a sformułowane zostało niemal tak dawno jak prawa Newtona, jego praktyczne znaczenie w technice jest olbrzymie, jednak szerzej znane jest ono jedynie w uproszczonym przypadku szczególnym rozciągania czy ściskania pręta. Wzór, jaki się tu powinien nasunąć, to $F = k \Delta l$. W tym wzorze F jest, oczywiście, siłą rozciągającą, a Δl wydłużeniem pręta. Stała proporcjonalności k jest różna dla różnych prętów. Nie jest trudno

uzasadnić, że stała ta dla różnych prętów wykonanych z tego samego materiału powinna być wprost proporcjonalna do pola przekroju poprzecznego s i odwrotnie proporcjonalna do długości początkowej l pręta. Z uwzględnieniem tej obserwacji prawo Hooke'a można zapisać w postaci

$$\frac{F}{s} = E \frac{\Delta l}{l},$$

gdzie E zależy już tylko od rodzaju materiału, ale nie od rozmiarów pręta. Stała E nazywa się *modułem Younga*.

Dla dalszych rozważań wygodnie jest zamiast siły działającej na cały przekrój rozważać siłę przypadającą na jednostkę pola powierzchni zwaną *napięciem* $N = F/s$. Gdy N jest ujemne, nazywa się je też ciśnieniem. Podobnie, zamiast bezwzględnej wartości wydłużenia Δl lepiej wprowadzić wydłużenie względne $x = \Delta l/l$, które będziemy zwać *deformacją*.

Z użyciem tych wielkości napiszemy

$$x = \frac{1}{E} N.$$

A zatem deformacja jest wprost proporcjonalna do napięcia lub, jak oryginalnie ujął to Hooke, *jakie napięcie – taka deformacja*.

Gdy przyjrzeć się dokładniej rozciąganiu prętowi, zauważy się, że deformacji podłużnej, spowodowanej napięciem wzdłużnym, towarzyszy nieodłączna deformacja poprzeczna, mimo że nie występuje poprzeczne napięcie! Ma to szczególne znaczenie, gdy pręt nie jest wcale długi, a wręcz jest klockiem prostopadłościennym (np. sześcianiem). Kompletne prawo Hooke'a musi opisać więc także i to, co dzieje się z wymiarami poprzecznymi. Sprawa jest prosta. Jest niemal oczywiste, że wartość każdej z deformacji poprzecznych (y w kierunku y i z wzdłuż osi z) powinna być pewnym stałym (dla danego materiału) *ułamkiem* deformacji podłużnej:

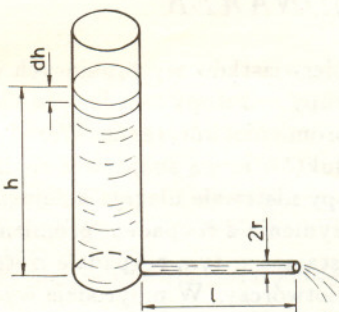
$$y = -\sigma x,$$

$$z = -\sigma x.$$

Stała σ jest, obok E , drugą stałą charakteryzującą własności sprężyste danego materiału. Nazywa się ona *stałą Poissona*.

Ścisłe biorąc, to, co zostało powyżej powiedziane, dotyczy tzw. ciał izotropowych, nie wyróżniających swą strukturą żadnego z kierunków. Ciałem takim będzie na przykład szkło czy zwykła bryła metalu będąca zlepkiem ogromnej ilości mikrokryształków chaotycznie zorientowanych. Przykładem ciała

Weźmy teraz pod uwagę cylindryczne pionowo ustawione naczynie napełnione do wysokości h cieczą o gęstości ρ i zaopatrzone w poziomą rurkę o długości l i promieniu r , przez którą ciecz może wypływać. Naczynie to przedstawione jest na rysunku 2.



Rys. 2

Objętość cieczy, która przepłynęła przez tę rurkę w bardzo małym przedziale czasu dt , jest określona wzorem Hageny–Poiseuille'a

$$(3) \quad dV = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8l\eta} dt,$$

w którym η oznacza współczynnik lepkości, a Δp różnicę ciśnień między końcami rurki. W naszym przypadku Δp jest ciśnieniem hydrostatycznym słupa cieczy w naczyniu i wyraża się znanym ze szkoły podstawowej wzorem

$$(4) \quad p = \rho gh.$$

Przyjmując, że ciecz jest nieściśliwa, można określić obniżenie się poziomu cieczy dh w naczyniu spowodowane jej wypływem

$$(5) \quad dV = -S dh,$$

S – oznacza w tym wzorze pole przekroju poprzecznego naczynia. Łącząc równania (3) i (5) oraz podstawiając Δp otrzymujemy

$$(6) \quad dh = -\frac{\pi r^4 \rho g}{8l\eta S} h dt.$$

Równanie to ma strukturę analogiczną do równania (1). Wyrażenie stojące przed h jest stałe i oznaczmy je przez λ_m

$$(7) \quad \lambda_m = \frac{\pi r^4 \rho g}{8l\eta S}.$$

Rozwiązaniem równania (6) przy warunku początkowym $h(0) = h_0$ jest funkcja

$$(8) \quad h(t) = h_0 e^{-\lambda_m t}.$$

Patrząc na równania (2) i (8) widzimy, że charakter zmian N oraz h w zależności od czasu jest taki sam. To właśnie pozwala nam wykorzystać cylindryczne naczynie z poziomą rurką do budowy modelu.

Rozpatrzmy teraz najprostszymi rozpad promieniotwórczy sukcesywny. Niech N_{01}, N_{02}, N_{03} i N_1, N_2, N_3 oznaczają odpowiednio liczby jąder trzech izotopów w chwili $t = 0$ i $t > 0$, λ_1 oraz λ_2 niech oznaczają stałe rozpadu pierwszych dwóch izotopów, trzeci jest trwały. Zmiany liczby jąder poszczególnych izotopów dN_1, dN_2, dN_3 w bardzo krótkim przedziale czasu dt wyrażają wzory wynikające z prawa rozpadu promieniotwórczego

$$(9) \quad dN_1 = -\lambda_1 N_1 dt,$$

$$(10) \quad dN_2 = (\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2) dt,$$

$$(11) \quad dN_3 = \lambda_2 N_2 dt.$$

Liczba jąder pierwszego izotopu maleje o $\lambda_1 N_1$, stąd minus w równaniu (9). Jądra pierwszego izotopu po rozpadzie przekształcają się w jądra izotopu drugiego. Przyrost ich liczby wynosi $\lambda_1 N_1$. Jednocześnie izotop ten rozpada się z szybkością $\lambda_2 N_2$, przekształcając się w izotop trzeci. Z tą samą szybkością wzrasta więc liczba jąder tego izotopu.

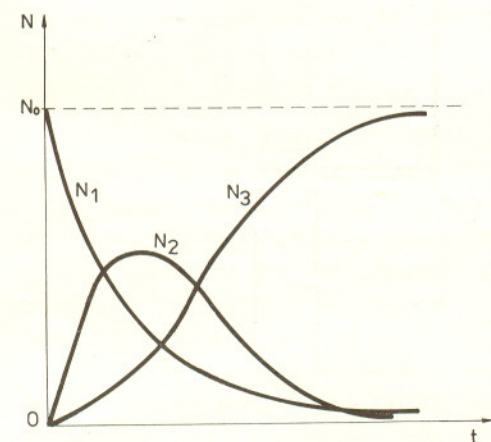
Załóżmy, że w chwili 0 istniał tylko pierwszy izotop, który po nieskończonym (praktycznie – bardzo długim) czasie przekształcił się za pośrednictwem izotopu drugiego w izotop trzeci. Te warunki brzegowe można zapisać w postaci $N_1(0) = N_{01}$, $N_2(0) = N_3(0) = 0$, $N_1(\infty) = N_2(\infty) = 0$ i $N_3(\infty) = N_{01}$. Łatwo sprawdzić przez różniczkowanie, że przy tych warunkach rozwiązania układu równań (9), (10), (11) mają postać

$$(12) \quad N_1 = N_{01} e^{-\lambda_1 t},$$

$$(13) \quad N_2 = N_{01} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}],$$

$$(14) \quad N_3 = N_{01} \left[1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}) \right].$$

Ich wykresy w zależności od czasu przedstawia rysunek 3.



Rys. 3

Równania analogiczne do równań (9), (10) i (11) opisują również zależności od czasu wysokości słupów cieczy w układzie naczyń pokazanym na rysunku 4.

W tym celu wystarczy zastąpić liczby jąder izotopów przez odpowiednie wysokości słupów cieczy, a stałe rozpadu przez współczynniki λ_{1m} i λ_{2m} zależne od parametrów modelu.

Otrzymujemy wtedy:

$$(15) \quad h_1 = h_{01} e^{-\lambda_{1m} t},$$

$$(16) \quad h_2 = h_{01} \frac{\lambda_{2m}}{\lambda_{2m} - \lambda_{1m}} [e^{-\lambda_{1m} t} - e^{-\lambda_{2m} t}],$$

$$(17) \quad h_3 = h_{01} \left[1 + \frac{\lambda_{1m}}{\lambda_{2m} - \lambda_{1m}} (e^{-\lambda_{2m} t} - e^{-\lambda_{1m} t}) \right].$$

Żeby zbudować hydrodynamiczny model sukcesywnego rozpadu promieniotwórczego, potrzebne będą: trzy przezroczyste plastikowe butelki o pojemności 1,5–2 l, trzy kawałki mocnej nici, dwie rurki do picia napojów (tzw. słomki), plastelina, linijka, mazak, nożyczki, zegarek z sekundnikiem, trochę piasku, naczynie z wodą i drewniany pręt o długości około 1 m lub większej (może to być np. kij od szczotki).

nieizotropowego może być drewno, które przy tym samym napięciu inaczej deformuje się, gdy rozciąga się je wzdłuż włókien, a inaczej gdy w poprzek włókien. Podobnie jest z monokryształami – uogólnieniem prawa Hooke'a na ciała anizotropowe zajmować się tu jednak nie będziemy.

Ponieważ za chwilę wprowadzimy napięcia w kierunku osi y i z , dla rozróżnienia oznaczymy napięcie dotychczasowe N działające wzdłuż osi x symbolem N_x . Zbierając wyrażenia na wszystkie trzy deformacje wywołane napięciem N_x mamy

$$x = \frac{1}{E} (N_x - 0),$$

$$y = \frac{1}{E} (0 - \sigma N_x),$$

$$z = \frac{1}{E} (0 - \sigma N_x).$$

Jeżeli oprócz napięcia N_x przyłożone jest i napięcie N_y , to wystąpią nowe deformacje: $(1/E)(N_y)$ w kierunku y oraz $(1/E)(-\sigma N_y)$ w każdym z kierunków x i z (które teraz są poprzeczne względem napięcia N_y). Wreszcie jeśli działa także napięcie N_z , to kompletna deformacja wynosi:

$$x = \frac{1}{E} (N_x - \sigma(N_y + N_z)),$$

$$y = \frac{1}{E} (N_y - \sigma(N_x + N_z)),$$

$$z = \frac{1}{E} (N_z - \sigma(N_x + N_y)).$$

Nim przejdziemy do tytułowego węża, jeszcze chwilę poświęcimy rozważaniom ogólnym. Dodajmy stronami trzy powyższe równania. Otrzymamy:

$$x + y + z = \frac{1}{E} (1 - 2\sigma)(N_x + N_y + N_z).$$

Czytelnik łatwo sprawdzi, że dla małych deformacji suma $x + y + z$ wyraża akurat względną zmianę objętości:

$$\frac{\Delta V}{V} = x + y + z.$$

Ponieważ przy ścisnaniu ze wszystkich stron ciało nie może zwiększać swej objętości (nastąpiłaby samorzutna eksplozja), przeto

$$\sigma \leq \frac{1}{2}.$$

Dla typowych metali jest $\sigma \approx 1/3$. Do górnej granicy wartości, tj. do $1/2$, stała Poissona zbliża się u ciał, których sprężystość względem zmiany objętości jest dużo większa niż względem zmiany kształtu. Ciałem takim jest guma, dla której $\sigma = 0,49$. Idealizując, możemy, dla uproszczenia, przyjąć dla gumy nawet $\sigma = 1/2$.

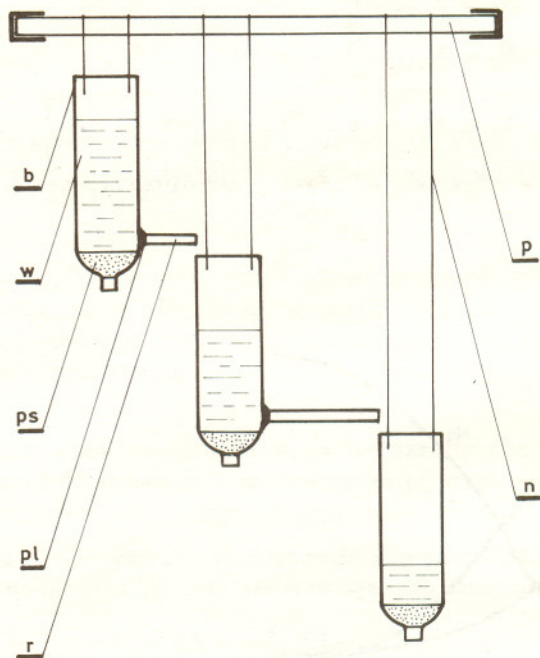
Wracamy teraz do węża. Spróbujmy wyznaczyć napięcia gumy w „nabitym” wodą wężu. Wyobraźmy sobie kwadracik wydzielony na powierzchni węża o jednej z par boków równoległych do osi. Z jakimi siłami ciągnięte są boki tego kwadratu, lub inaczej, z jaką siłą trzeba by trzymać każdy centymetr długości „rany”, jaka powstałaby na powierzchni węża, gdyby go autentycznie naciąć na całej grubości lancetem i starać się nie dopuścić do „wodotoku”? Dla kierunku podłużnego siłę tę najłatwiej wyznaczyć tnąc od razu wąż na całym obwodzie. Siła, którą musimy przyłożyć, równa się w tym przypadku parciu wody na denka cylindra. Oznaczając promień węża przez r , a ciśnienie wody (ponad atmosferyczne; ciśnienie atmosferyczne w dalszym ciągu zaniehbamy jako nieistotne dla naszego problemu) przez p i zaniehbując (chwilowo) grubość h gumy, ustalamy, że na obwodzie o długości $2\pi r$ trzeba przyłożyć siłę $\pi r^2 p$. Na każdą jednostkę długości przypada więc $pr/2$, a na jednostkę pola powierzchni przeciętego materiału $pr/2h$.

W celu wyznaczenia napięcia poprzecznego wyobrażamy sobie, że przecinamy wąż na całej długości d (jak bagietkę, z której chcemy zrobić bardzo długą kanapkę). Siła oddalająca obie połówki węża równa się i teraz iloczynowi ciśnienia i pola przekroju (a nie pola powierzchni bocznej walca!), czyli $2rdp$, i trzeba ją rozłożyć równomiernie na długości dwóch „ran” wynoszącej razem $2d$. Daje to na jednostkę długości siłę równą pr , a napięcie równe pr/h . Zauważmy, że napięcie wzdłużne jest dokładnie dwa razy mniejsze od poprzecznego. Nic dziwnego, że na przykład parówki w gotowaniu, o ile pękają, to zawsze wzdłuż osi.

Trochę mniej oczywiste jest, jak sobie poradzić z napięciem (teraz ujemnym) w kierunku prostopadłym do powierzchni węża. Napięcie to zmienia się od zera na powierzchni zewnętrznej do wartości $-p$ na powierzchni wewnętrznej. Szczęśliwie napięcie to nie zależy od wartości h , podczas gdy dwa poprzednie zawierały h w mianowniku. W przypadku węża o cienkich (w stosunku do promienia) ściankach można przyjąć, że napięcie prostopadłe do powierzchni jest równe zeru.

Przyjmując, że oś węża to oś x , kierunek prostopadły do powierzchni to z ,

Od butelek odcinamy dna, wykonujemy w pobliżu powstałego brzegu cztery otworki, przez które przewlekamy nić służącą do zawieszenia butelek. Nici te muszą być różnej długości, tak żeby druga butelka znalazła się poniżej korka pierwszej, a trzecia poniżej korka drugiej (rys. 4). Butelki zakręcamy korkami i wypełniamy piaskiem część zwężającą się w pobliżu szyjki. Otrzymamy w ten sposób naczynie o stałej powierzchni przekroju poprzecznego. W bocznych ścianach w pobliżu zwężającej się części dwóch wyżej zawieszonych butelek wycinamy jeszcze po jednym otworze, przez który przekładamy słomki. Miejsca przechodzenia słomek przez ścianki butelek uszczelniamy plasteliną. Butelki zawieszamy na niciach na podpartym na końcach, np. na oparciach dwóch ustawionych obok siebie krzeseł, drewnianym pręcie.



Rys. 4. b – butelka, n – nić, pl – plastelina, p – pręt, ps – piasek, r – rurka, w – woda.

Za pomocą mazaka i linijki rysujemy skalę zaznaczając w równych odstępach, np. co 1 cm, poziome kreski. Koniec słomki wychodzącej z pierwszej butelki zatykamy korkiem z plasteliny, napełniamy tę butelkę wodą i notujemy wysokość, na której znajduje się górna powierzchnia tej cieczy. Następnie usuwamy plastelinowy korek i pozwalamy cieczy swobodnie przepływać. W równych odstępach czasu, np. co 20 s, odczytujemy na skalach wysokości poziomy wody we wszystkich trzech butelkach. Pomiar przeprowadzamy aż do momentu przepłynięcia całej cieczy do trzeciej – najniższej położonej butelki. Na podstawie tych wyników sporządzamy wykresy wysokości słupów cieczy w zależności od czasu i porównujemy te wykresy z rysunkiem 3.

Na zakończenie trzy problemy do samodzielnego rozwiązania:

1. Mamy do dyspozycji tylko rurki o równych średnicach. Jak w najprostszy sposób można uzyskać układ do badania rozpadu izotopów o innych wartościach stałej rozpadu?
2. Jakie jeszcze zjawiska lub procesy można modelować za pomocą naszego układu?
3. Jak zmieni się kształt krzywych z rysunku 3 dla przypadku, gdy stałe rozpadu będą spełniały warunki: $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1 \gg \lambda_2$ i $\lambda_1 \ll \lambda_2$?