

Przybliżone sumowanie

Witold BEDNAREK

Zacniemy od zadania: Wyznacz wartości sum

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9999}},$$

$$(2) \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{9999}$$

z możliwie jak najlepszym przybliżeniem.

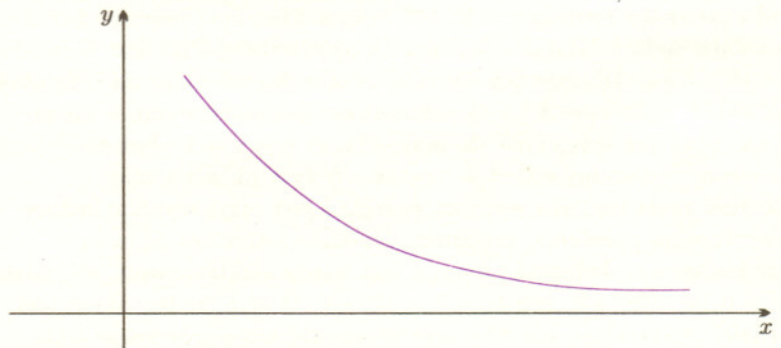
Na pierwszy rzut oka rozwiązanie wydaje się żmudnym procesem rachunkowym, bowiem w tych przypadkach nie istnieją powszechnie znane wzory sumacyjne (jak na przykład dla ciągu arytmetycznego i geometrycznego).

Spróbujmy inaczej podejść do problemu.

Rozważmy funkcję f określoną na zbiorze liczb dodatnich, która jest

1. dodatnia,
2. malejąca,
3. wypukła w dół,
4. różniczkowalna.

Rysunek 1 przedstawia orientacyjny kształt wykresu takiej funkcji.



Niech $A_k = (k, 0)$, natomiast $B_k = (k, f(k))$ dla $k \in \mathbb{N}$.

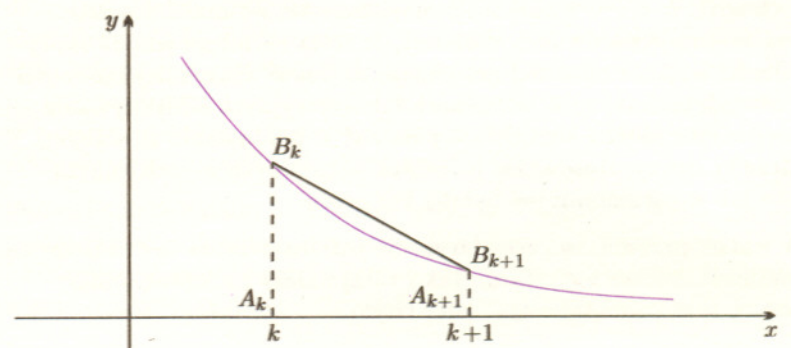
Niech P_k oznacza pole trapezu $A_k A_{k+1} B_{k+1} B_k$, a T_k – pole trapezu krzywoliniowego o tych samych wierzchołkach, to jest figury ograniczonej prostymi $y = 0$, $x = k$, $x = k + 1$ i wykresem funkcji f .

Mamy

$$(3) \quad P_k = \frac{f(k) + f(k+1)}{2}.$$

Ponieważ funkcja f jest wypukła w dół, więc odcinek $B_k B_{k+1}$ leży powyżej wykresu f w przedziale $(k; k+1)$. Zatem (rys. 2)

$$(4) \quad T_k < P_k.$$



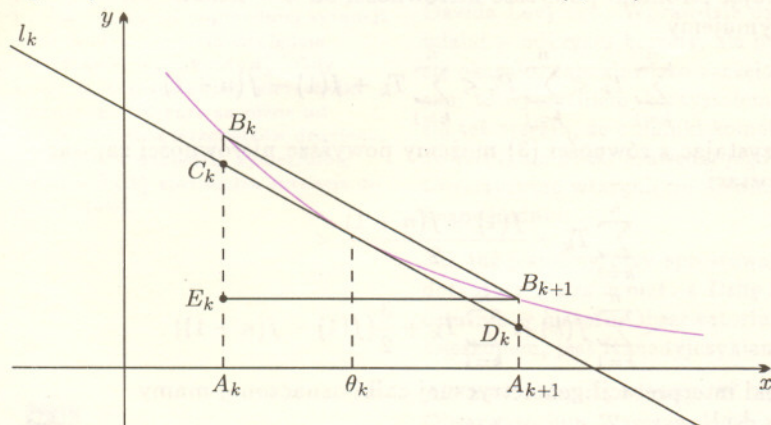
fragmentów nieba południowego. Celem programu było badanie wielkoskalowej struktury Wszechświata na podstawie analizy korelacji położenia odległych galaktyk. Takie odległe galaktyki mają rozmiary kątowe rzędu kilku sekund łuku i ich obrazy trudno jest odróżnić od obrazów słabych gwiazd, przez co wyznaczanie położenia i klasyfikacja setek tysięcy obiektów jest zajęciem niezwykle nudnym i czasochłonnym. Dlatego do tej pracy zaprzęgnięto komputer. Na jednym ze zdjęć fragmentu nieba w gwiazdozbiore Sekstansa „zauważył” on obszar o średnicy kilkunastu minut łuku, w którym gęstość słabych gwiazd była wyraźnie wyższa niż w obszarach sąsiednich. Wyszło wniosek, że te „dodatkowe” słabe gwiazdy są w rzeczywistości najjaśniejszymi gwiazdami pobliskiej, dotychczas nie znanej galaktyki karłowatej. Szybko wykonano dodatkowe obserwacje i już po roku było wiadomo, że nowo odkryty obiekt jest kolejnym słabym towarzyszem naszej Galaktyki. W 1992 roku doniesiono o znalezieniu jeszcze jednego takiego obiektu w gwiazdozbiore Tukana.

W najbliższych latach planowane jest wykonanie nowego atlasu całego nieba. Atlas ten będzie wykonany nie na kliszach fotograficznych, jak to było dotychczas, ale za pomocą detektorów CCD. Obrazy nieba będą zapisywane i przechowywane w postaci cyfrowej. Dzięki temu będzie możliwa ich bardzo dokładna i szybka analiza za pomocą komputerów. Nowy atlas pozwoli też na identyfikację gwiazd znacznie słabszych, niż było to możliwe w przypadku atlasów zrobionych techniką fotograficzną. Głównym celem autorów planowanego przeglądu jest klasyfikacja i badanie rozkładu przestrzennego kilkudziesięciu milionów galaktyk. Można jednak oczekiwać, że przy okazji odkryte zostaną dalsze galaktyki wchodzące w skład Grupy Lokalnej.

Pomimo podobnego wyglądu karłowate galaktyki będące satelitami Drogi Mlecznej nie stanowią jednorodnej grupy. Niektóre z nich zawierają wyłącznie bardzo stare gwiazdy o wieku zbliżonym do wieku najstarszych gwiazd w Galaktyce. Wszystkie gwiazdy, obserwowane w obiektach takich jak Sculpator czy Ursa Minor, powstały mniej więcej jednocześnie w momencie tworzenia się tych galaktyk przed około 15 miliardami lat. Z kolei w obiektach takich jak Carina czy Leo I mamy mieszaninę gwiazd bardzo starych i stosunkowo młodych, utworzonych 5–7 miliardów lat temu. Obserwujemy w nich nawet gwiazdy o wieku nie przekraczającym 3 miliardów lat. Najwyraźniej ewolucja galaktyk karłowatych przebiegała na wiele sposobów.

Z twierdzenia Lagrange'a wynika, że przez pewien punkt o odciętej $\theta_k \in (k; k+1)$ można poprowadzić styczną l_k do wykresu f równoległą do prostej $B_k B_{k+1}$.

Niech C_k i D_k będą punktami przecięcia stycznej l_k odpowiednio z prostymi o równaniach $x = k$ oraz $x = k+1$ (rys. 3).



Z wypukłości w dół funkcji f wynika, że punkty C_k i D_k leżą odpowiednio poniżej punktów B_k i B_{k+1} . Niech wreszcie $E_k = (k, f(k+1))$. Łatwo zauważyć (jak?), że prosta l_k przecina odcinek $\overline{E_k B_k}$, a zatem

$$|B_k C_k| < |B_k E_k| = f(k) - f(k+1).$$

Czworokąt $C_k D_k B_{k+1} B_k$ jest równoległobokiem. Jeśli odcinek $B_k C_k$ przyjmiemy za podstawę, to wysokość będzie równa 1. Z ostatniej równości wynika, że pole R_k tego równoległoboku szacuje się następująco:

$$(5) \quad R_k = |B_k C_k| \cdot 1 < f(k) - f(k+1).$$

Prosta l_k dzieli trapez $A_k A_{k+1} B_{k+1} B_k$ na dwie figury. Jedną z nich jest równoległobok. Pole $P_k - R_k$ pozostałej części jest mniejsze od pola T_k trapezu krzywoliniowego $A_k A_{k+1} B_{k+1} B_k$:

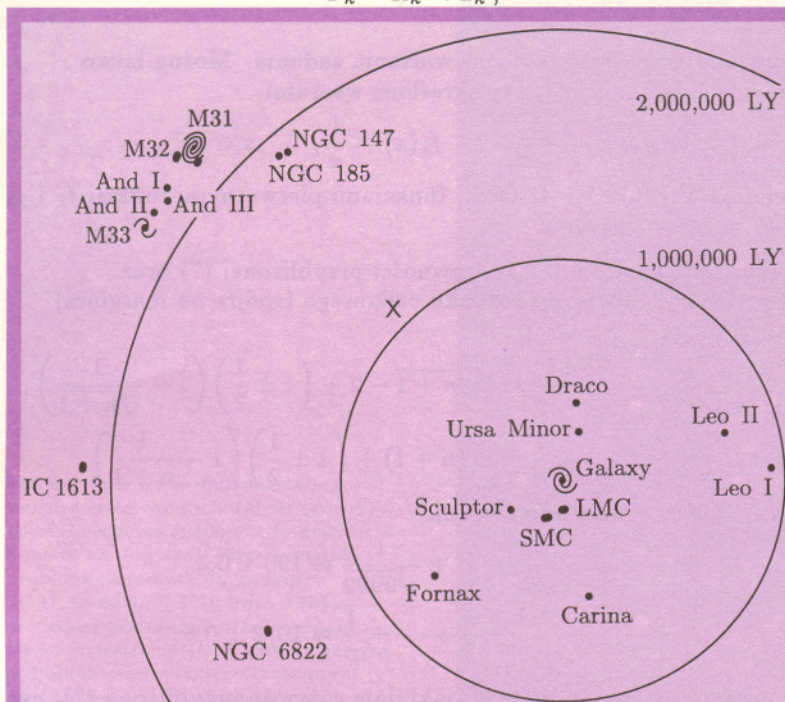
$$P_k - R_k < T_k,$$

Niejednokrotnie w *Delcie* było wspomniane, że wielkość całkowitej masy Galaktyki jest przedmiotem kontrowersji. Z jednej strony sumaryczna masa gwiazd oraz obłoków gazu i pyłu wynosi około 10^{10} mas Słońca. Z kolei analiza orbit gwiazd oraz obłoków gazu wskazuje na wartość o rząd wielkości większą. W takiej sytuacji około 90% masy Galaktyki ukryte byłoby w obiektach niedostępnych obserwacji. Sugerowano, że ukryta masa występuje w postaci nieznanych cząstek elementarnych (np. masywne neutrino) lub gwiazdopodobnych obiektów o masach zbyt małych, aby mogły zainicjować reakcje termojądrowe w swoim wnętrzu (takie hipotetyczne obiekty o masach rzędu kilku mas Jowisza nazywane są brązowymi karłami). Masy galaktyk karłowatych są znacząco mniejsze niż masa Drogi Mlecznej i dlatego możemy traktować je jako cząstki próbne orbitujące w jej polu grawitacyjnym. Dzięki temu może stać się wykonalne nowe wyznaczenie masy naszej Galaktyki.

Załóżmy na początek, że dany satelita ma tylko radialną składową prędkości (v) względem centrum Galaktyki, którą potrafimy wyznaczyć dzięki efektowi Dopplera. Oczywiście, prędkość radialną wyznaczamy nie względem środka masy Galaktyki, lecz względem Słońca, znając jednak orbitę Słońca w Galaktyce potrafimy stosowną poprawkę uwzględnić. Aby galaktyka-satelita pozostawała związana grawitacyjnie z Drogą Mleczną, jej energia kinetyczna powinna być mniejsza niż wartość bezwzględna jej energii potencjalnej. Oznaczając przez M masę Galaktyki, przez R odległość satelity, a przez m jego masę, dostajemy zależność:

$$\frac{1}{2}mv^2 < \frac{GMm}{R}.$$

W rezultacie mamy dolne ograniczenie na masę Galaktyki: $M > (Rv^2)/(2G)$. Musimy jeszcze wyznaczyć odległość satelity. Wykorzystujemy w tym celu fakt, że w galaktykach karłowatych występuje pewna klasa gwiazd zmiennych o znanej mocy promieniowania. Są to gwiazdy pulsujące typu RR Lyrae. Są one stosunkowo jasne i dzięki zmienności blasku możliwe do identyfikacji nawet w galaktykach odległych o miliony lat świetlnych. Ich jasność absolutna uśredniona względem okresu pulsacji (typowe okresy wynoszą kilkanaście godzin) jest w przybliżeniu taka sama dla wszystkich obiektów tego typu i znana dzięki pomiarom odległości i obserwowanych jasności zmiennych RR Lyrae położonych blisko Słońca. Mierząc teraz obserwowane jasności tych gwiazd leżących w innych galaktykach możemy wyznaczać odległości tych właśnie odległych systemów gwiazdowych.



Grupa Lokalna Galaktyk w rzucie na płaszczyznę trzech najbardziej masywnych. X oznacza przybliżone położenie środka masy układu.

Najsilniejsze ograniczenie masy Drogi Mlecznej otrzymujemy podstawiając do wyprowadzonego wzoru dane dla galaktyki Leo I. Jej odległość i prędkość radialna względem centrum Galaktyki wynoszą odpowiednio 230 kpc oraz 177 km/s (dodatnia wartość v oznacza, że galaktyka oddala się), co daje $M_G > 2 \times 10^{11}$ mas Słońca.

W rzeczywistości satelity naszej Galaktyki nie muszą poruszać się radialnie. Aby wyznaczyć pełen wektor prędkości, należy zmierzyć również składową prędkości prostopadłą do kierunku widzenia obiektu (tę składową nazywamy prędkością tangencjalną, styczną). Nie jest to łatwe. Gdyby bowiem prędkość tangencjalna galaktyki Leo I była taka jak jej prędkość radialna (co do wartości bezwzględnej), to jej położenie na sferze niebieskiej zmieniłoby się o 0,0001 sekundy łuku na rok. Aby zmierzyć tak mały kąt, musimy zaobserwować zmianę położenia gwiazd galaktyki względem obiektów, co do których możemy założyć, że stanowią dobre przybliżenie nieruchomego układu odniesienia. Takimi obiektami są jądra odległych galaktyk oraz kwazary. Program obserwacyjny mający za cel wyznaczenie prędkości tangencjalnych dla galaktyk karłowatych z Grupy Lokalnej jest obecnie w zaawansowanym stadium realizacji. Jego autorzy wykorzystują zdjęcia wykonane największymi teleskopami w latach 50. oraz nowe ekspozycje robione tymi samymi teleskopami obecnie. Dzięki bazie czasowej sięgającej 40 lat obrazy gwiazd w badanych pobliskich galaktykach karłowatych wykazują mierzalne przesunięcia względem tła odległych galaktyk i kwazarów. Można mieć uzasadnioną nadzieję, że już niedługo zostaną wyznaczone pełne wektory prędkości satelitów naszej Galaktyki, co w konsekwencji pozwoli wyznaczyć jej masę.

Wiadomość z ostatniej chwili:

W pierwszych dniach kwietnia 1994 roku grupa 3 astronomów z Cambridge (Anglia) doniosła o odkryciu nowej galaktyki karłowatej. Nowo odkryta galaktyka znajduje się w gwiazdozbiore Strzelca i jest ukryta za rojem gwiazd z centralnych obszarów naszej Galaktyki. Na niebie zajmuje obszar o rozmiarze około 10×5 stopni. Galaktyka Strzelec jest położona w odległości zaledwie 15 kpc od centrum Galaktyki i w odległości 24 kpc od Słońca. Odległości te są ponad dwa razy mniejsze niż odległości Wielkiego Obłoku Magellana, uważanego dotychczas za najbliższego satelity naszej Galaktyki.

Jeżeli funkcja f jest ciągła na odcinku $[a; b]$, to istnieje taka funkcja F , że $F'(x) = f(x)$ dla $x \in (a; b)$. Funkcję F nazywamy funkcją pierwotną funkcji f . Okazuje się, że

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Jest to tzw. podstawowy wzór rachunku całkowego. Można to zapisać również w postaci

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

czyli

$$P_k < T_k + R_k.$$

Z powyższej nierówności oraz nierówności (4) i (5) mamy

$$T_k < P_k < T_k + f(k) - f(k+1).$$

Sumując stronami powyższe nierówności od $k = 1$ do $k = n$ otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^n T_k < \sum_{k=1}^n P_k < \sum_{k=1}^n T_k + f(1) - f(n+1).$$

Korzystając z równości (3) możemy powyższe nierówności zapisać w postaci

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n T_k + \frac{f(1) - f(n+1)}{2} < < \sum_{k=1}^n f(k) < \sum_{k=1}^n T_k + \frac{3}{2}(f(1) - f(n+1)).$$

Dzięki interpretacji geometrycznej całki oznaczonej mamy

$$T_k = \int_k^{k+1} f(x) dx \text{ i stąd} \quad \sum_{k=1}^n T_k = \int_1^{n+1} f(x) dx.$$

Nierówność (6) przyjmie teraz postać

$$\int_1^{n+1} f(x) dx + \frac{f(1) - f(n+1)}{2} < < \sum_{k=1}^n f(k) < \int_1^{n+1} f(x) dx + \frac{3}{2}(f(1) - f(n+1))$$

lub w formie przybliżonej

$$(7) \quad \sum_{k=1}^n f(k) \approx \int_1^{n+1} f(x) dx + \left(1 \pm \frac{1}{2}\right)(f(1) - f(n+1)).$$

Przystępujemy wreszcie do rozwiązania zadania. Można łatwo sprawdzić, że funkcje f_1, f_2 określone wzorami

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbf{R}^+,$$

spełniają warunki 1 - 4. Otóż, funkcjami pierwotnymi funkcji f_1 i f_2 są $F_1 = 2\sqrt{x}, F_2 = \ln x$.

Korzystając z udowodnionej równości przybliżonej (7) oraz z podstawowego wzoru rachunku całkowego (spójrz na margines) mamy

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \approx 2\sqrt{n+1} - 2 + \left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right),$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln(n+1) + \left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Dla $n = 9999$ mamy odpowiednio

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9999}} \approx 199 \pm 0,5,$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \approx 10,2 \pm 0,5.$$

Zauważmy na koniec, że błąd, jaki daje równość przybliżona (7), nie przekracza, niezależnie od wartości n , liczby $\frac{1}{2}f(1)$.