

# Dowody niewymierności pewnych liczb

Robert HAJŁASZ

Znane jest twierdzenie:

*Jeśli równanie stopnia  $n$ -tego o współczynnikach całkowitych i współczynniku przy najwyższej potędze równym 1 ma pierwiastek wymierny, to jest on całkowity.*

Z twierdzenia tego skorzystamy niżej przy dowodzeniu niewymierności pewnych liczb.

I. Wykazać, że  $\sqrt[11]{13}$  jest liczbą niewymierną.

Dowód.

Rozważmy równanie

$$x^{11} - 13 = 0.$$

Liczba  $\sqrt[11]{13}$  jest rozwiązaniem tego równania. Przypuśćmy, że jest ona wymierna. Wówczas, z uwagi na to, że równanie ma współczynniki całkowite i współczynnik przy najwyższej potędze równy 1, otrzymujemy, że liczba  $\sqrt[11]{13}$  jest całkowita. A przecież nią nie jest. Sprzeczność.

**Uwaga.** W ten sam sposób dowodzimy, że niewymiernymi są liczby  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt[11]{19}$ ,  $\sqrt[11]{307}$ , itp.

Podamy jeszcze jeden dowód faktu, że

$$\sqrt{2} \text{ jest liczbą niewymierną.}$$

(Dowód pochodzi od matematyka angielskiego T. Estermana.)

Przypuśćmy, że  $\sqrt{2}$  jest liczbą wymierną. Wówczas istnieje najmniejsza liczba naturalna – oznaczmy ją przez  $n$  – taka, że  $n\sqrt{2}$  jest liczbą naturalną.

Rozważmy teraz liczbę  $n\sqrt{2} - n$ . Otrzymujemy, że

- 1)  $n\sqrt{2} - n$  jest liczbą naturalną,
- 2)  $n\sqrt{2} - n < n$  (bo  $n\sqrt{2} < 2n$ ),
- 3)  $(n\sqrt{2} - n)\sqrt{2}$  jest liczbą naturalną (bo  $2n - n\sqrt{2}$  jest liczbą naturalną).

Otrzymaliśmy sprzeczność, bo znaleźliśmy liczbę  $n\sqrt{2} - n$ , która jest naturalna, mniejsza od  $n$  i taka, że  $(n\sqrt{2} - n)\sqrt{2}$  jest liczbą naturalną.

II. Wykazać, że

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$$

jest liczbą niewymierną.

Dowód.

Przypuśćmy, że liczba ta jest wymierna. Wówczas podnosząc ją do kwadratu i odejmując 2 – odpowiednią liczbę razy – otrzymujemy, że  $\sqrt{2}$  jest liczbą wymierną. Sprzeczność.

III. Wykazać, że  $\operatorname{tg} 1^\circ$  jest liczbą niewymierną.

Dowód.

Przypuśćmy, że  $\operatorname{tg} 1^\circ$  jest liczbą wymierną. Wówczas wymierne są też liczby

## Wbrew zdrowemu rozsądkowi (X)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Tomasz HOFMOKL

### Czy umiecie się dziwić?

W poprzednich dziewięciu pogadankach omawiałem zjawiska, których wynik zdaje się przeczyć naszemu poczuciu tego, co możliwe i dlatego skłonni jesteśmy je uznać za przeczące zdrowemu rozsądkowi. Zjawisk takich jest bardzo wiele i długo jeszcze można by gawędzić na ten temat. Kiedy jednak przychodzi pora zakończyć nasze spotkania, powstaje problem, jaki temat najbardziej by się do tego nadawał.

Zdecydowałem, że dobrze nadaje się do tego wskazanie, jak cenną cechą jest umiejętność dziwienia się. Mamy ją wszyscy we wczesnym dzieciństwie. Zadręczamy rodziców pytaniami *a co to? a po co to? a dlaczego?* Nie zawsze nawet wysłuchamy odpowiedzi, a już gotowe jest następne pytanie. Z wiekiem tę zdolność dziwienia się stopniowo zatracamy, wszystko powszednie i nie potrafimy już ujrzeć za zasłoną powszedniości zaskakujących problemów. Na szczęście nie wszyscy tracą zdolność dziwienia się i z nich wyrastają prawdziwi badacze.

Nie jest trudno zostać prawdziwym badaczem, bo rzeczy niezwykłych dzieje się wokół wiele. Aby się jednak czymś zdziwić, trzeba na ten temat mieć pewne podstawowe wiadomości. Jeżeli dziwię się (na przykład), że moja znajoma z dnia na dzień stała się platynową blondynką, to znaczy, że miałem informację o jej dotychczas kruczoczarnych włosach i dziwię się, jaki to fenomen przyrody lub może, bardziej się ograniczając, chemii, może być za to zjawisko odpowiedzialny. Niedobrze jest, jeżeli zarejestruję obie informacje: wczoraj ciemna, dziś blondynka i nie wywoła to żadnej reakcji.

Może, oczywiście, oznaczać to, że zjawisko zmiany koloru włosów jest dla mnie aż nadto dobrze znane. Wtedy, istotnie, nie ma czemu się dziwić. Może jednak być i tak, że nie dziwię się, bo mnie to nic nie obchodzi – i to jest objaw niepokojący. Oznacza to, że jestem nastawiony na rejestrowanie faktów, bo same pchają się

przed oczy, ale nie interesuje mnie pytanie ani *dlaczego?*, ani *w jaki sposób?*. Jest to duże kalectwo intelektualne i stąd pytanie, czy Państwo nie są nim dotknięci, **czy umieją się Państwo dziwić?**

Po tym wprowadzeniu rozejrzyjmy się dookoła. Na pomoc przywołałyśmy tylko szkolną wiedzę z fizyki.

Obserwacja pierwsza: stoję na Ziemi, ciężko mi od niej się oderwać, co najwyżej mogę podskoczyć. Wiem, że to Ziemia przyciąga mnie grawitacyjnie. Dlaczego jednak nie odczuwam żadnego przyciągania ze strony innych obiektów materialnych?

Zapytany o to fizyk odpowie, że takie przyciąganie, oczywiście, istnieje, ale jest niesłychanie słabe. Jeżeli cała ogromna Ziemia przyciąga mnie (a ja ją) z siłą odpowiadającą mojemu ciężarowi, to zwykły budynek wielokrotnie lżejszy od Ziemi może to uczynić z tylekroć mniejszą siłą.

Możemy zadowolić się tą odpowiedzią i wtedy kończy się nasze zdziwienie, ale możemy być nieco bardziej dociekliwi i natychmiast wymyślić następny problem. Wiemy przecież, że jesteśmy zbudowani z atomów, a te zawierają elektrycznie naładowane dodatnie jądra i ujemne elektrony. Czy ładunki elektryczne, jakie są we mnie, dokładnie się równoważą?

Prosty rachunek, dostępny dla ucznia w szkole, może wykazać, że gdyby atomy nie były doskonale obojętne elektrycznie, to oddziaływałyby na siebie ogromnymi siłami. Wyobraźmy sobie dla przykładu, że Panie mają nadmiar ładunków dodatnich, a Panowie nadmiar ładunków ujemnych. Załóżmy dalej, że ten nadmiar lub niedomiar jest znikomo mały, na przykład niech tylko jedna stumilionowa część ładunku protonów u Pań, a elektronów u Panów, będzie niezobojętniona. Czy wyobrażają sobie Państwo, co by się wówczas działo? Otóż siła przyciągania płci przeciwnych z odległości jednego metra byłaby rzędu milionów milionów niutonów. Z tą samą siłą odpychałyby się wzajemnie Panie, jak również Panowie. To, że możemy w miarę spokojnie (na ogół) przechodzić obok siebie nie ulegając zmiażdżeniu ani odrzuceniu (choć, oczywiście, pewien pociąg lub abominację możemy wyraźnie odczuwać), świadczy o idealnym niemal zrównoważeniu ładunków elektronów i protonów w materii naszego organizmu. Czy to nas dziwi?

Jeżeli nie, to trudno, ale warto jednak snuć dalej te rozważania i dalej się dziwić.

$$\operatorname{tg} 2^\circ = \frac{2 \operatorname{tg} 1^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 1^\circ},$$

$$\operatorname{tg} 3^\circ = \operatorname{tg}(1^\circ + 2^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ}{1 - \operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 2^\circ},$$

$$\operatorname{tg} 4^\circ = \operatorname{tg}(1^\circ + 3^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 3^\circ}{1 - \operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 3^\circ},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg}(1^\circ + 29^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 29^\circ}{1 - \operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 29^\circ}.$$

Otrzymaliśmy, że  $\operatorname{tg} 30^\circ$ , czyli  $\sqrt{3}/3$  jest liczbą wymierną. Sprzeczność.

IV. Wykazać, że  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$  jest liczbą niewymierną.

Dowód.

I sposób. Korzystamy z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta.

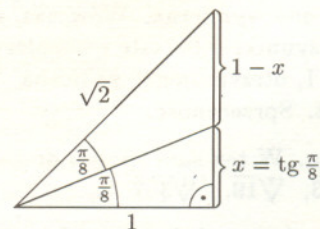
*W trójkącie dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do boków przyległych.*

W naszym przypadku

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{\sqrt{2}},$$

$$x\sqrt{2} = 1-x,$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1.$$



A więc  $x$ , czyli  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$  jest liczbą niewymierną.

II sposób.

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$$

$$1 = \frac{2a}{1-a^2} \quad (a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8})$$

(\*)  $a^2 + 2a - 1 = 0$

$$a_1 = \sqrt{2} - 1 \text{ - liczba niewymierna.}$$

(Można i tak: Liczba  $a$  jest pierwiastkiem równania  $v^2 + 2v - 1 = 0$  (patrz (\*)). Gdyby liczba  $a$  była wymierna, to z uwagi na to, że równanie ma współczynniki całkowite i współczynnik przy najwyższej potędze równy 1, otrzymalibyśmy, że  $a$  jest liczbą całkowitą. Że nie jest, widać to wyraźnie na rysunku (sposób I). Tam jest to część jedynek, więc nie jest liczbą całkowitą.)

Rozwiążemy teraz zadanie znane już Czytelnikom *Delty*.

V. Czy istnieją takie dwie liczby niewymierne  $a$  i  $b$ , że  $a^b$  jest liczbą wymierną?

Rozwiązanie.

I sposób. Rozważmy liczbę  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ . Liczba ta jest albo wymierna, albo niewymierna. Jeśli jest wymierna, to odpowiedź jest twierdząca w sposób oczywisty. Jeśli jest niewymierna, to tę niewymierną podnosimy do niewymiernej  $\sqrt{2}$  i otrzymujemy

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

a więc otrzymujemy liczbę wymierną.

Odpowiedź: Tak.

**Uwaga.** Można udowodnić, że  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  jest liczbą niewymierną. Napiszemy o tym w artykule „O liczbach przestępnych” w *Delcie* 11/1994.

II sposób.  $\sqrt{2}^{\lg \sqrt{2}^3} = 3$ . Pozostaje wykazać, że  $\lg \sqrt{2}^3$  jest liczbą niewymierną. Przypuśćmy, że  $\lg \sqrt{2}^3$  jest liczbą wymierną, czyli że

$$\lg \sqrt{2}^3 = \frac{m}{n},$$

gdzie  $m$  i  $n$  są pewnymi liczbami naturalnymi (wolno napisać, że naturalnymi, bo  $\lg \sqrt{2}^3 > 0$ ). Stąd

$$(\sqrt{2})^{m/n} = 3,$$

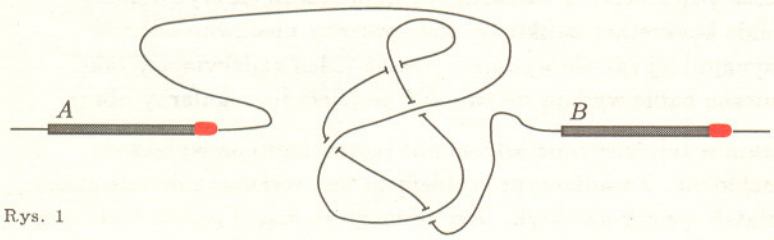
$$\sqrt{2}^m = 3^n,$$

$$2^m = 9^n.$$

Lewa strona dzieli się przez 2, prawa zaś nie. Sprzeczność.

### Jak to rozwiązać?

Mamy prostą. Usuńmy z niej pewien odcinek i zamiast niego „wklejmy” krzywą, tak jak na rysunku 1.



Rys. 1

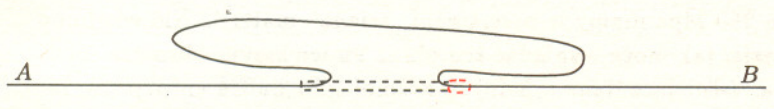
Problem jest następujący:

*Czy po każdej takiej krzywej da się przejechać zapalką z lewej półprostej (położenie A) na prawą (położenie B) w taki sposób, aby cały czas oba końce zapalki dotykały linii?*

Ponieważ nie jest jasne, jak matematycznie zdefiniować krzywą, więc proponuję przyjąć, że obie półproste A i B są połączone nie krzywą, lecz łamaną.

Proponuję też najpierw porobić trochę doświadczeń z różnymi krzywymi. Czytelnik przekona się, jak czasami skomplikowane ruchy zmuszona jest wykonywać zapalka, nim przejdzie od A do B. Ale czy zawsze to się jej uda?

Jeżeli zapalka znajduje się w takim położeniu, jak na rysunku 2, to na pewno nie przejdzie ona na półprostą B. To jednak nie jest kontrprzykład, bo gdybyśmy wystartowali z położenia A, to bez przeszkód dojdziemy do B. Po prostu ruszając z A zapalka nigdy nie wpadnie w taką pułapkę, jaka jest przedstawiona na rysunku 2.



Rys. 2

Czekamy na listy. Autorom najciekawszych dowodów bądź kontrprzykładów wyślemy nagrody książkowe.

Piotr HAJŁASZ

Przecież takie idealne prawie zrównoważenie świadczy, że ładunek elektryczny nie zależy od jego ruchu. Elektronów są znacznie bardziej ruchliwe od protonów, a jednak mają w materii dokładnie ten sam ładunek co do wartości, a różniący się tylko znakiem. Co w tym dziwnego? Choćby to, że wiemy skądinąd, iż masa zależy od prędkości ciała. Czy nie zaskakuje nas, że ładunek nie wykazuje tej zależności?

Kojarząc niezależność ładunku od jego prędkości i stwierdzenia szczególnej teorii względności można wywnioskować, że powinno istnieć pole magnetyczne (faktycznie odkryto je wcześniej niż teorie względności, ale możemy spróbować zrobić to na nowo po jej odkryciu). Wiedząc zaś o polu magnetycznym przewodnika z prądem możemy (na nowo) zaprojektować silnik elektryczny. Ten ciąg wnioskowania można ciągnąć jeszcze daleko. Wybrałem go dla wykazania, że wnikliwie zastanowienie się, dlaczego nie odczuwam żadnego pociągu do znajomej Pani (a w każdym razie nie mierzonego w milionach milionów niutonów), może doprowadzić – przy odpowiedniej zdolności wnioskowania – do odkrycia zasady działania silnika elektrycznego.

Przedstawione rozumowanie było rozumowaniem naukowym. Wyciągaliśmy wnioski ze znanych faktów doświadczalnych i nie postulowaliśmy niczego, czego nie można by sprawdzić doświadczalnie. Nie zawsze jednak tak być musi.

Na sam koniec zatrzymam się na koncepcjach, które wykraczają poza ściśle naukowe wnioskowanie. Obserwacja, którą proponuję wykonać, jest zaskakująco prosta. Proszę spróbować stwierdzić, że Pan czy Pani istnieje. Czy to zamierzenie wydaje się być pozbawione sensu?

Znane jest powiedzenie „myślę, więc jestem”. Jest to jakieś rozwiązanie sprawy. Możemy sprawdzić to w jeszcze prostszy sposób nie nadwężając naszych władz umysłowych. Można się po prostu uszczypnąć. Jeżeli Państwo nie zasnęli nad lekturą tego tekstu, to i tę obserwację świadcząca o własnym istnieniu wykonają Państwo bez trudności. A teraz pytanie, czy ta obserwacja coś nam daje. Oczywiście, tak.

Skoro stwierdziliśmy, że istniejemy, nasuwa się od razu szereg pytań filozoficznych o to, skąd wziął się człowiek, o jego świadomość, myśli, o jego duszę.

Ten zakres pytań – niewątpliwie bardzo ważnych i ciekawych – należy do filozofii i religii. Ale czy może należeć do nauk przyrodniczych? Okazuje się, że tak. Niech Państwo pozwolą, że spróbuję teraz poprowadzić na ten temat rozważania.

Żyjemy na Ziemi. Ziemia nie jest typowym środowiskiem we Wszechświecie. Żyjemy na planecie o szczególnych właściwościach, okrążającej stabilną (a więc też szczególną) gwiazdę – Słońce. Obserwujemy Wszechświat nie w jakiejś dowolnej chwili, lecz właśnie wtedy, gdy osiągnął on dostateczny stopień rozwoju, aby wytworzyć tak złożone formy materii jak my – ludzie. Idąc krok dalej możemy powiedzieć, iż jesteśmy teraz i tutaj z tego powodu, że prawa fizyki i podstawowe stałe przyrody są właśnie takie, aby umożliwić nam powstanie. Mówiąc w skrócie – to właśnie taki, a nie inny zestaw praw przyrody, praw fizyki doprowadził do tego, że mogliśmy się – czytając jeden z poprzednich akapitów – uszczypnąć.

Wyobraźmy bowiem sobie, że został stworzony Wszechświat o nieco innych podstawowych stałych. Zabawmy się w takiego majsterkowicza, który stwarza Wszechświat zmieniając – powiedzmy – tylko stałą grawitacyjną, czyli tę stałą, która jest odpowiedzialna za przyciąganie nas przez Ziemię i nie tylko nas. Ponieważ stała grawitacyjna jest tak niezwykle mała, więc typowa gwiazda, jak nasze Słońce, zawiera około  $10^{57}$  atomów – w mniejszym zgrupowaniu atomów siły grawitacyjne nie byłyby w stanie tak zgnieść materii, aby nastąpił zapłon reakcji jądrowych. Wyobraźmy teraz sobie, że siły grawitacyjne byłyby większe o tysiąc milionów razy. W stosunku do sił elektrostatycznych byłyby dalej nieporównanie mniejsze, bo we Wszechświecie, w którym żyjemy, są one  $10^{39}$  razy mniejsze, a w świecie, który mamy właśnie zamiar stworzyć, byłyby „tylko”  $10^{30}$ . W końcu różnica zaledwie dziewięciu zer przy prawie czterdziestu zerach. W tym nowym Wszechświecie Słońce mogłoby być tysiąc milionów milionów (czyli  $10^{15}$ ) razy mniejsze niż nasze Słońce, żyłoby natomiast tylko jeden nasz rok. Wobec tego na naszej planecie nie starczyłoby czasu na powstanie życia i ewolucję istot inteligentnych, za jakie się uważamy.

Możemy podobnie bawić się z innymi stałymi fizyki i za każdym razem dojdziemy do zaskakującego wniosku, że nawet mała zmiana ich wartości uniemożliwiłaby nasze istnienie. Czyżby więc były one dobrane specjalnie dla nas?

## Patrz w niebo

Jaki jest rozkład materii we Wszechświecie w największych skalach? – oto problem nurtujący astronomów od dawna. Pogląd na tę sprawę ewoluował z biegiem czasu i do dziś nie jest ustalony. Kilkadziesiąt lat temu panowało przekonanie, że gromady galaktyk rozrzucone są w przestrzeni losowo, a więc w największych skalach wypełniają Wszechświat równomiernie. Kilkanaście lat temu wydawało się, że tworzą coś jakby splecione kłęb włókien. Obecnie, dzięki nowym danym obserwacyjnym podejrzewa się, że materia w postaci galaktyk i gromad galaktyk tworzy raczej powierzchnie połączonych bąbli otaczające obszary względnej pustki. Krótka mówiąc, kiedyś zdawało się, że Wszechświat przypomina rój, potem gąbkę, a dziś pianę. Prawdę mówiąc, innych możliwości nie ma.

Podczas gdy teoretycy za każdym razem starali się wytłumaczyć istnienie konkretnej struktury, obserwatorzy niedawno odkryli – przynajmniej tak się wydaje – jeszcze jeden zadziwiający fakt: kosmiczne bąble wydają się tworzyć regularny obraz.

Badania w tej dziedzinie astronomii (kosmologii) są wyjątkowo czasochłonne. Zasadniczym problemem jest wyznaczanie odległości dziesiątek tysięcy galaktyk. Jest to możliwe dzięki prawu Hubble’a: im dalsza jest galaktyka, tym większa jest jej prędkość radialna. Trzeba więc fotografować widma ogromnej liczby galaktyk, by przez porównanie z widmami laboratoryjnymi znaleźć przesunięcia linii, a stąd prędkości galaktyk określone przez efekt Dopplera i w konsekwencji odległości. A uzyskanie widma bardzo odległej, a więc słabej galaktyki, to mogą być godziny pracy dużego teleskopu. Co prawda, technika idzie stale naprzód, ale i tak nie sposób takimi badaniami objąć całego widocznego Kosmosu. Ograniczając się do galaktyk bliskich (jasnych) można zbadać całe niebo, ale płytko, bardzo głęboko można sięgnąć tylko w wybranych kierunkach.

Właśnie kilka lat temu głębokie sondowania Wszechświata w kierunkach obu biegunów galaktycznych wykazały, że galaktyki tworzą zgęszczenia niemal regularnie co 250 Mpc (liczba ta zależy zresztą od przyjętej wartości stałej Hubble’a, ale nie jest to tu ważne). Obserwacje obejmowały w każdym kierunku obszar nie większy od stopnia kwadratowego i sięgały do galaktyk o jasności 22 mag.

Jeżeli odkrycie zostanie potwierdzone, to będzie oznaczać, że co 250 Mpc mamy w przestrzeni „ścianę” materii. Nie wiadomo na razie, jak może wyglądać ten obraz na większym obszarze nieba. Istniejące dane u jednych kosmologów budzą entuzjazm, inni podchodzą do nich z ogromną rezerwą. Niektórzy dowodzą, że owo „skwantowanie odległości” to fluktuacja statystyczna i nie należy się tym przejmować, jeszcze inni twierdzą, że jeżeli rozkład materii jest rzeczywiście tak regularny, to oznacza, że nasza wiedza o wczesnym Wszechświecie jest po prostu fałszywa.

Tomasz KWAST

# Chodzenie

Bartosz ZIELIŃSKI

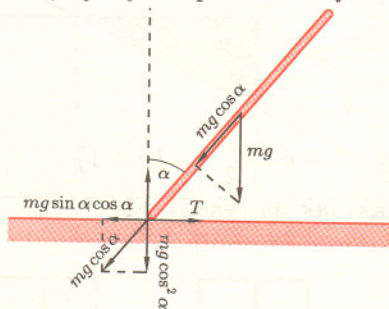
Proces chodzenia możemy potraktować jako ciągłe przewracanie się i podpieranie, w wyniku którego przesuwa się środek ciężkości.

– Unosimy lewą nogę, pochylamy się lekko, tak by rzut środka ciężkości na podłoże przesunął się poza prawą stopę. Zaczynamy się przewracać, podpieramy się lewą nogą, przenosimy na nią ciężar ciała, unosimy prawą itd.

Dla uproszczenia potraktujmy chodzącego człowieka na etapie przewracania się jako przewracający się prosty kij. Obliczmy, przy jakim kącie  $\alpha$  między kijem a pionem zacznie się on ślizgać, jeśli współczynnik tarcia statycznego między kijem i podłożem wynosi  $f$ .

$T$  – siła tarcia,  
 $R$  – reakcja podłoża,  
 $mg$  – ciężar.

Przenieśmy wektor składowej siły ciężkości równoległej do kija do punktu styczności kija z podłożem i rozłóżmy go na składową równoległą i prostopadłą do podłoża.



W chwili, gdy zacznie się poślizg, mamy  $mg \sin \alpha \cos \alpha = T_{max}$ , ale  $T_{max} = fmg \cos^2 \alpha$ . Wynika stąd, że

$$mg \sin \alpha \cos \alpha = fmg \cos^2 \alpha,$$

a więc

$$(*) \quad \operatorname{tg} \alpha = f.$$

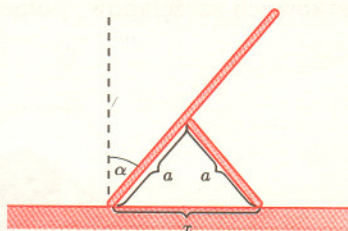
Oczywiście, człowiek nie jest kijem, ale w przybliżeniu, zwłaszcza dla niewielkich kroków, wzór można uznać za prawdziwy również dla człowieka.

Zakładając, że w momencie, gdy podpieramy się drugą nogą, aby zatrzymać przewracanie się, obie nogi są wyprostowane, możemy, korzystając ze wzoru (\*) obliczyć maksymalną długość kroku, jaki można zrobić bez obawy poślizgnięcia się

$x$  – długość kroku,

$a$  – długość nogi,

$$x = 2a \sin \alpha = 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}} = 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{f^2}}},$$



czyli im mniejszy współczynnik tarcia, tym mniejsze kroki trzeba robić.

Wzór ten tłumaczy, na przykład, dlaczego podczas chodzenia po śliskim podłożu możemy robić jedynie małe kroki.

Przyroda jest pełna niespodzianek. Ziemia jest ciągle bombardowana przez cząstki nadlatujące z przestrzeni kosmicznej, tzw. promienie kosmiczne. Niektóre z nich niosą energię miliony razy większą niż energie rzędu  $10^{11}$  eV, do których możemy rozpędzać cząstki elementarne w największych ziemskich akceleratorach. W listopadowym numerze *Physical Review Letters* z 1993 roku grupa doświadczalna z Uniwersytetu Utah pracująca z detektorem promieni kosmicznych *Fly's Eye* (oko muchy) powiadomiła o wynikach badań wskazujących, że jedno ze źródeł wysoko energetycznych ciężkich jąder o energii rzędu  $10^{19}$  eV „wypaliło się” i stało się źródłem wysoko energetycznych protonów. Takie wnioski wyciągnięto z przypadku zarejestrowania cząstki o energii  $3 \cdot 10^{20}$  eV. Jest to olbrzymia energia. Zauważmy, że  $3 \cdot 10^{20}$  eV =  $3 \cdot 10^{20} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$  J = 48 J. Widać, że energia tej cząstki jest porównywalna z energią kinetyczną cegły o masie około 5 kg, spadającej z wysokości 1 m!

Jeżeli tak, to przywraca nam to wiarę w naszą ważność dla całego Wszechświata i naszą w nim szczególną rolę, odebraną ludzkości przez Kopernika.

A może jest jednak inaczej – może kiedyś okaże się, że stałe fizyczne mają takie, a nie inne wartości, bo tak (z jakichś, dziś trudnych do wymyślenia, względów) musi być. Przecież jeszcze sto lat temu można było snuć dość dowolne rozważania na temat zmiany prędkości światła i siły oddziaływań elektrycznych i magnetycznych. Dziś wiemy jednak, że te wielkości są ze sobą powiązane. Być może przyszła teoria dokona takiego połączenia całej wiedzy przyrodniczej i okaże się, że nasz Wszechświat jest jedynym możliwym. Ale może też dowiemy się na pewno, że jest (przynajmniej teoretycznie) więcej możliwości. Wtedy naszkicowane rozważania zmuszą nas do refleksji.

Jest wielu specjalistów od kosmologii, którzy już teraz na poważnie traktują tego typu analizę. W 1986 roku ukazała się poważna monografia astronoma Johna Barrowa i fizyka Franka Tiplera pt. *Antropiczna Zasada Kosmologiczna*. Sformułowana jest w niej tak zwana silna i tak zwana słaba zasada antropiczna. W formie silnej twierdzi ona: *Wszechświat musi mieć takie właściwości, aby na pewnym stopniu rozwoju mogło powstać życie*. Oto do jakich wniosków może doprowadzić dziwienie się własnemu istnieniu.

Ale nie koniec na tym. Jeżeli powiązemy tę zasadę z wnioskami dotyczącymi pomiarów w mechanice kwantowej, to możemy dojść do następującej konkluzji: *Na początku było tylko prawdopodobieństwo zaobserwowania. Wszechświat mógł więc powstać tylko wtedy, gdy znalazł się ktoś, kto go obserwuje*. I to nieważne, że obserwator pojawił się szereg miliardów lat później. Wszechświat istnieje, ponieważ jesteśmy tego świadomi.

Ktoś może powie, że to, co tu napisałem, jest rzeczywistość wbrew zdrowemu rozsądkowi. Nie mogę temu całkowicie zaprzeczyć. Chciałem jednak w tym ostatnim przykładzie pokazać nieco spekulacji, jakie spotyka się w bardzo poważnych pracach naukowych. Może rozważania te prowadzą donikąd, może rzeczywistość są bezsensowne, ale chyba wnoszą jakiś ferment i niepokój do ustalonych poglądów. Rozwój nauki nie przebiega według planu badań naukowych: *w tym roku odkryjemy to i tamto*. Czasami największy postęp wynika z dziwienia się wszystkiemu, co nas otacza. A jest czemu się dziwić.