

O czym wiedzieli Wikingowie...

Około 890 roku Wulfstan, podróżujący w misji władającego Anglią Alfreda Wielkiego, wyruszył z Hedeby na Półwyspie Jutlandzkim, by po siedmiu dniach żeglugi dopłynąć do położonego nad jeziorem Drużno pruskiego portu Truso (koło dzisiejszego Elbląga), którego pozostałości odnaleziono dopiero na początku lat osiemdziesiątych naszego stulecia. W relacji podróżnika znajduje się następujący, zagadkowy fragment:

„A Estowie posiadają taką umiejętność, że potrafią wytwarzać zimno. I dlatego nieboszczyk leży tam długo i nie rozkłada się, ponieważ działają na niego zimnem. A jeśli postawi się dwa naczynia pełne piwa lub wody, potrafią oba zamrozić, obojętnie czy jest lato, czy zima.”

Czy słowa te są wyłącznie produktem wyobraźni średniowiecznego wędrowca, czy może kryje się w nich ziarno prawdy? Gdyby chodziło jedynie o nieznaczne obniżenie temperatury, rzecz byłaby prosta, można wykorzystać do tego zjawisko parowania. W krajach Południa znane są naczynia (zwane w Hiszpanii „alcarraze”, a w Egipcie „gole”) wykonane z niewypalanej gliny, mające tę własność, że przechowywana w nich woda ma niższą temperaturę niż otoczenie. Dzieje się tak dlatego, że woda przesącza się przez ścianki naczynia, wykonanego (co ważne) z niewypalanej gliny, i paruje z jego zewnętrznej powierzchni, odbierając ciepło od znajdującej się w nim wody. Im wyższa temperatura powietrza i im mniejsza jest jego wilgotność, tym intensywniejsze jest parowanie, a co za tym idzie – większa różnica temperatur, jaką można osiągnąć. Nie przekracza ona jednak kilku stopni Celsjusza. Tymczasem Wulfstan pisał:

„Gdy umrze tam jakiś człowiek, nie spalony on leży w swoim domu u rodziny i przyjaciół jeden miesiąc lub niekiedy dwa, królowie zaś i inni wysoko postawieni ludzie o tyle dłużej, ile więcej mają bogactw, niekiedy przez pół roku nie są oni spaleni i leżą na wierzchu w swoich domach.”

Obniżenie temperatury pozwalające zahamować biologiczne procesy rozkładu musiałyby być znaczne, wymagałyby temperatur poniżej 0°C. Nie wchodzi tu w grę magazynowanie lodu. Musiałoby go być dużo, co nawet przy założeniu, że 1100 lat temu panował w Europie chłodniejszy klimat, byłoby raczej niemożliwe. Co więcej, mieszkańcy Północy ten sposób byłby znany lepiej niż Bałtom, byłby też dla niego czymś zwyczajnym, a więc niegodnym wzmianki. Wulfstan mówi o „wytwarzaniu zimna”, czyli o jakiejś aktywnej działalności, nieznaney w jego kręgu kulturowym. Wydaje się, że wytworzenie dużej różnicy temperatur wymaga zaawansowanej techniki. Zdrowy sceptycyzm nakazuje potraktować relację Wulfstana jako wytwór fantazji, gdyby nie rozwiązanie innej fascynującej zagadki pochodzącej z tej samej epoki.

Żeglujący po północnych morzach Wikingowie nie znali kompasu, a mimo to byli doskonałymi nawigatorami i potrafili (jak podają stare norweskie sagi) określić położenie Słońca nawet wtedy, gdy nie było ono widoczne. Pieśni mówią, że posługiwali się w nawigacji „kamieniami słonecznymi”. Można rzec: fantazja poety. A jednak...

Zagadka została rozwiązana w latach sześćdziesiątych naszego stulecia. Położenie Słońca można określić na podstawie stopnia polaryzacji światła rozproszonego w ziemskiej atmosferze, zależy on od kierunku obserwacji względem kierunku do Słońca. Polaryzację światła można badać posługując się kryształami dichroicznymi.

Jak porowaty lód przewodzi ciepło i co to ma wspólnego z kometami

Konrad KOSSACKI

Określenie *porowaty lód* jest bardzo ogólne. Porowatym lodem jest zarówno świeży śnieg, jak i zamrożona woda z kranu (kto nie wierzy, niech zmierzy gęstość i porówna z wartością tablicową dla czystego lodu). Różnica między podanymi przykładami porowatego lodu polega przede wszystkim na wielkości porów i ich łącznej objętości. Zazwyczaj zamiast objętości porów podaje się stosunek objętości porów do objętości całej substancji z porami włącznie, nazywany porowatością. Dodatkową różnicą między śniegiem i zamrożoną wodą jest to, że pory w świeżym śniegu są ze sobą połączone, podczas gdy w zamrożonej wodzie występują w postaci zamkniętych pęcherzyków. Na ogół, przy porowatości poniżej 0,2–0,3 wszystkie pory w lodzie są oddzielone od siebie, a przy porowatości większej procent porów połączonych rośnie ze wzrostem porowatości. Tak więc podstawowe parametry charakteryzujące porowaty lód to jego porowatość i przeciętny rozmiar porów.

Jedną z najciekawszych właściwości porowatego lodu jest jego przewodnictwo cieplne, które w zależności od warunków może być wyższe lub niższe od przewodnictwa cieplnego lodu nieporowatego. Dokładny opis transportu ciepła w śniegu – czy ogólniej – w porowatym lodzie jest bardzo skomplikowany. Aby problem uprościć, można, na przykład, zapomnieć o istnieniu powietrza w porach. Założenie to jest nie tylko wygodnym uproszczeniem, ale dokładnie odpowiada warunkom występującym na powierzchni ciał kosmicznych pozbawionych atmosfery. Takich ciał kosmicznych jest wiele, na przykład są to komety. Wprawdzie w czasie przelotu komety przez centrum Układu Słonecznego jej jądro jest otoczone wyraźnie widocznym obłokiem, ale gęstość tego obłoku jest znikoma. Będziemy więc utożsamiać pojęcia *kometa* i *jądro komety*. Są przynajmniej dwa powody, dla których komety zasługują na szczególną uwagę.

1) Jądro komety składa się prawie wyłącznie z lodu i skały. Przyjmuje się, że przed pierwszą wizytą w centralnej części Układu Słonecznego kometa jest bryłą luźno związanych ziarenek lodu i okruchów skalnych. Gęstość jądra komety Halleya (wyznaczona w czasie jej ostatniego przelotu przez centrum Układu Słonecznego) jest znacznie mniejsza od gęstości lodu – przynajmniej dwukrotnie, to znaczy porowatość jądra wynosi przynajmniej 0,5. Nie jest to wcale rekord. Kometa Du Toit-Hartley ma jądro, w którym aż 80% objętości jest puste. Można więc uznać, że jądro komety jest dobrym przykładem bryły porowatego lodu umieszczonego w próżni (choć zanieczyszczonego skalnymi okruchami). Szczęśliwie przewodnictwa cieplne lodu i skały są zbliżone, a w temperaturze około 140 K są nawet równe. Z tego powodu zaniedbanie obecności ziarenek skały przy analizie przewodnictwa cieplnego nie jest wielkim błędem. Duże porowatości pozwalają przyjmować, że większość porów jest połączona. Jeśli chodzi o rozmiar porów, to będziemy zakładać, że są nie większe niż 0,1 milimetra.

2) Analizy materiału wyrzucanego z jądra komety Halleya, wykonane przez satelitę Giotto podczas jego zbliżenia do tej komety w 1986 roku, pozwalają sądzić, że skład tej komety (a więc prawdopodobnie i innych) pozostał prawie nie zmieniony od powstania Układu Słonecznego. Dokładne zbadanie jądra komety byłoby więc bardzo pouczające.

Najdokładniejszym sposobem poznania budowy komety jest pobranie próbki z jej powierzchni.

Istnieje już projekt wysłania satelity na jedną z lepiej poznanych komet. Program nosi nazwę ROSETTA i prawdopodobnie będzie realizowany wspólnie przez NASA i Europejską Agencję Kosmiczną ESA. Ze względu na koszty tego przedsięwzięcia termin jego realizacji nie jest jeszcze określony.

Wysłanie próbnika lądującego i wykonującego wiercenia wymaga wcześniejszego oszacowania wytrzymałości powierzchni komety. Dobrze by było, gdyby wytrzymałość ta była jak najmniejsza, gdyż ze względu na znikomą siłę przyciągania grawitacyjnego komety (na powierzchni komety Halleya jest ona około dziesięć tysięcy razy mniejsza niż na Ziemi) próbnik może nie zapaść się przy lądowaniu. Wywiercenie otworu w celu pobrania próbki będzie wtedy bardzo trudne, ponieważ znikoma grawitacja uniemożliwi dociśnięcie wiertła.

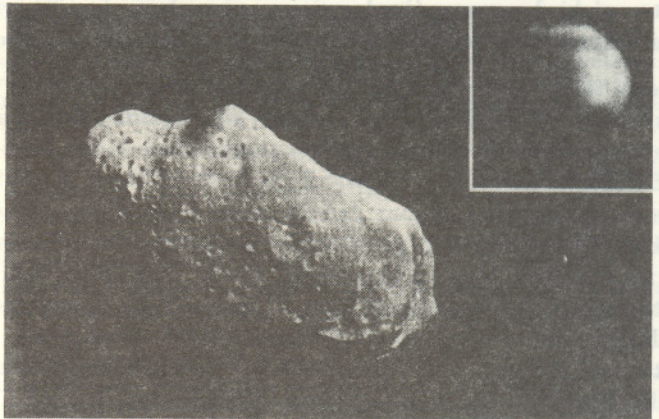
Po przebadaniu naturalnie występujących w Skandynawii kryształów o tej własności stwierdzono, że najlepszym kandydatem do miana „kamienia słonecznego” jest kordieryt $Mg_2Al_3(AlSi_5O_{18})$. Piękne, jubilerskie kordieryty znajdowane są w Norwegii i Finlandii, a także w Szwajcarii. W Polsce można je gdzieś spotkać w Sudetach. Kordieryt pozwala znaleźć położenie Słońca z dokładnością do $2;5$, nawet jeśli znajduje się ono 7° poniżej linii widnokregu. Dla Wikingów pływających często poza kręgiem polarnym takie kamienie musiały być czymś bezcennym. Ten sposób nawigacji stosowany jest czasem w lotnictwie. Tak zwany kompas zmierzchu, którego istotnym elementem jest filtr polaryzacyjny, stosowany jest do określenia położenia Słońca po jego zachodzie, na podstawie zmian polaryzacji błękitu nieba wraz z kierunkiem obserwacji.

Może więc warto czasem potraktować poważnie stare legendy i kronikarskie zapisy, które w pierwszej chwili wydają się nam wątpliwe i z szacunkiem spojrzeć na umiejętności naszych przodków lub współczesnych nam ludów, które zwykliśmy uważać za dzikie...

Krzysztof REJMER

Patrz w niebo

Dzięki misjom Pioneerów i Voyagerów odkrytych zostało wiele nowych satelitów planet Układu Słonecznego, stale odkrywane są nowe satelity Słońca, tj. planetoidy (w tym również pozapłutonowe), odkryto satelity pulsara, czyli właściwie planety obiegające inną gwiazdę (nasz rodak, Aleksander Wolszczan pracujący w USA), wreszcie w lutym tego roku odkryto pierwszego satelitę planetoidy. Mianowicie analiza obrazów przesłanych przez sondę Galileo (zmierzającą ku Jowiszowi) wykazała, że planetoida 243 Ida ma małego towarzysza. Sama Ida to nieregularny blok skalny o najdłuższym wymiarze 56 km, jej satelita jest nawet bardziej niż ona zbliżony do kuli o średnicy nie przekraczającej 1 km. Przypuszcza się, że obrazy uzyskane w ciągu kilku następnych miesięcy ukażą go dokładniej.



Za wcześnie jest, oczywiście, dociekać, jakie jest pochodzenie tego satelity. Przechwycenie drobnego okruchu materii przez planetoidę jest niezmiernie mało prawdopodobne ze względu na słabą grawitację planetoidy i konieczność udziału w takim wydarzeniu jakiegoś trzeciego ciała. Raczej można się spodziewać, że satelita jest fragmentem Idy, który od niej niezbyt gwałtownie odpadł wskutek zderzenia z innym okruchem lub wskutek rotacji planetoidy. Cokolwiek zaszło w przeszłości i tak musiało być fenomenem wyjątkowym, bowiem wynikiem jest układ, w którym prędkości względne są rzędu 100 m/s, podczas gdy normalnie tak małych prędkości względnych w Układzie Słonecznym po prostu nie ma.

Tomasz KWAST

Czy różnorodności nieorientowalne muszą mieć dziury?

Słowniczek:

Różnorodność

to np. prosta, okrąg, płaszczyzna, sfera albo wstęga Möbiusa. Pierwsze dwie to różnorodności 1-wymiarowe, pozostałe – 2-wymiarowe. Oczywiście, jest dużo innych różnorodności wymiaru 2 i wyższego. Ogólnie, różnorodność n -wymiarowa to coś, czego każdy odpowiednio mały fragment jest podobny do kawałka (konkretnie – kuli otwartej w) przestrzeni n -wymiarowej \mathbf{R}^n .

Uwaga: Kula otwarta w \mathbf{R}^2 to koło bez brzegu, w \mathbf{R}^1 (na prostej) to odcinek bez końców.

n -wymiarowiec

to stwór, który mieszka w przestrzeni \mathbf{R}^n .

Możemy go też umieszczać w różnorodnościach n -wymiarowych (w tych małych fragmentach, które wyglądają jak kule).

Uwaga: Zakładamy, że n -wymiarowiec ma podobną do człowieka budowę anatomiczną, tzn. ma dokładnie dwie n -wymiarowe ręce zakończone dłońmi i dłoń prawa jest odróżnialna od lewej!

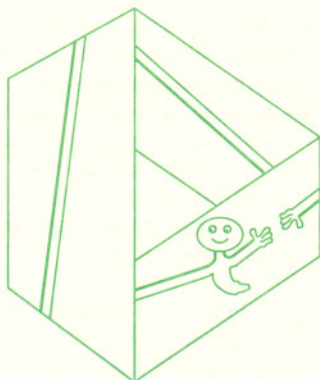
Różnorodność nieorientowalna

to, na przykład, wstęga Möbiusa, butelka Kleina albo płaszczyzna rzutowa.

Nieorientowalność oznacza tyle, że jeśli umieścimy w różnorodności dwóch n -wymiarowców, z których jeden jest złośliwy, to może on porwać koleżkę prawą rękawiczką, obiec z nią różnorodność „dookoła”, skutkiem czego rękawiczka zmieni się na lewą.

Wyobraźmy sobie n -wymiarowca (patrz definicja w słowniczku) i umieścmy go w różnorodności n -wymiarowej nieorientowalnej.

Jak wiadomo, n -wymiarowcy są często obdarzeni specjalnymi zdolnościami, na przykład ten nasz potrafi rozciągać ręce, a ponieważ różnorodność jest nieorientowalna, więc może tak rozciągnąć swoją prawą rękę, że jego prawa dłoń wróci do niego jako lewa.



Przypuśćmy, że chwyci się on teraz za dłonie i zacznie „ściągać”. Gdyby w różnorodności nie było dziur, to mogłoby to robić bez przeszkód, aż znalazłby się w kawałku podobnym do przestrzeni \mathbf{R}^n (a więc orientowalnym).

Ale przecież cały czas trzymał się za ręce, więc po ściągnięciu miałyby dwie lewe dłonie, co jest w kawałku orientowalnym niemożliwe, nawet dla n -wymiarowca!

Maciej RADZIEJEWSKI

Przed pierwszym wejściem do centrum Układu Słonecznego kometa jest więc bryłą słabo zlepionych ziarenek. Z eksperymentów wiadomo, że ziarenka lodu mają tendencję do zlepiania się pod wpływem ciepła. Gdy kometa zbliża się do Słońca, temperatura powierzchni jądra wzrasta. Wzrost twardości i grubości skorupy zależy od szybkości przenikania ciepła w głąb jądra, a więc od przewodnictwa cieplnego. Gdyby przewodnictwo cieplne jądra było bardzo niskie, ciepło przenikałoby w głąb bardzo powoli, a więc nagrzewałoby się praktycznie sama powierzchnia jądra i zlepianie ziarenek lodu zachodziłoby z zauważalną szybkością tylko w cienkiej warstwie przy samej powierzchni jądra komety. Cienka warstwa zlepionych ziarenek nie wpływałaby istotnie na wytrzymałość mechaniczną jądra komety. Z drugiej strony, przy dużym przewodnictwie cieplnym szybko rosłaby grubość warstwy, w której temperatura wystarczałaby do szybkiego zlepiania ziarenek lodu.

Przepływ ciepła w porowatym lodzie odbywa się generalnie dwiema drogami: w samym lodzie i w porach. Można więc mówić o przewodnictwie cieplnym sieci ziarenek lodu oraz o przewodnictwie cieplnym porów.

1. Przewodnictwo cieplne sieci ziarenek lodu

Analiza przewodnictwa cieplnego samej sieci ziarenek lodu jest równoważna założeniu, że pory w ogóle nie przewodzą ciepła. (Założenie to jest dobre tylko w niskich temperaturach. Przy temperaturze wyższej niż około 220–240 K może się nawet okazać, że przewodnictwo cieplne porowatego lodu jest większe niż lodu bez porów.)

Przewodnictwo cieplne porowatej substancji powinno być mniejsze niż tej samej substancji bez porów i różnica powinna być tym większa, im większą część objętości zajmują pory. Założmy, że porowata substancja jest złożona z ziarenek. W takim razie możemy sobie wyobrazić analogię z obwodem elektrycznym złożonym z oporników i przewodów. Powierzchnia styku ziarenek jest, oczywiście, mniejsza niż średnia powierzchnia przekroju samych ziarenek, więc w tej analogii miejsca styku ziarenek będą opornikami, a same ziarenka przewodami łączącymi. Gdyby cała struktura była idealnie regularna, to wypadkowe przewodnictwo można by obliczyć. Niestety, struktura porowata lodu jest bardzo nieregularna. Wykonanie

dokładnych obliczeń wymagałyby znajomości rozmiarów i położenia wszystkich ziarenek. Byłoby to bardzo skomplikowane i czasochłonne. Tymczasem zupełnie zadowalające rezultaty można uzyskać stosując różne przybliżenia.

Omówimy tylko najprostszy, rurkowy model porów. Oddaje on poprawnie charakter zależności przewodnictwa cieplnego sieci ziarenek lodu od porowatości, a przy tym pozwala uniknąć skomplikowanych rachunków.

Wyobraźmy sobie sześcian o krawędzi l z porami w kształcie rurek o jednakowej średnicy, prostopadłych do jednej z powierzchni. Niech temperatura zmienia się tylko w kierunku równoległym do rurek. Wówczas stosunek przewodnictwa kostki z porami do przewodnictwa kostki nieporowatej będzie równy stosunkowi $(l^2 - \text{powierzchnia przekrojów rurek})/l^2$.

Porowatość jest w tym przypadku stosunkiem objętości rurek do objętości kostki. Stosunek przewodnictwa substancji porowatej do nieporowatej wynosi

$$1 - \psi,$$

gdzie przez ψ oznaczyliśmy porowatość. Tak więc przewodnictwo cieplne sieci ziarenek lodu (przewodnictwo cieplne porowatego lodu, liczone bez uwzględnienia przewodnictwa porów) wyniosłoby

$$\kappa_p = \kappa_l(1 - \psi),$$

gdzie wielkość κ_l jest przewodnictwem cieplnym nieporowatego lodu.

2. Przewodnictwo cieplne porów w lodzie

Transport ciepła w porach może się odbywać, na przykład, za pośrednictwem promieniowania elektromagnetycznego (głównie podczerwonego). Podstawową właściwością tego procesu jest to, że zachodzi bez względu na to, czy pory są wypełnione gazem, czy są całkowicie puste. Strumień energii wypromieniowanej przez ścianki poru jest proporcjonalny do czwartej potęgi temperatury (prawo Stefana-Boltzmann). Zatem po cieplejszej stronie poru emisja przeważa nad absorpcją, a po chłodniejszej odwrotnie i w ten sposób energia jest przenoszona ze strony cieplejszej na chłodniejszą. Przy temperaturze niższej niż temperatura topnienia lodu wodnego promienisty transport ciepła jest jednak zaniedbywalny.

Ponieważ pory w lodzie nie są naprawdę puste, nawet gdy lód jest umieszczony w próżni, transport promienisty nie jest jedynym możliwym sposobem transportu ciepła w porach. Żeby znaleźć inne

Pas Kuipera chyba istnieje

Tomasz KWAST

W 1950 roku Jan Oort wysunął hipotezę, że Układ Słoneczny jest otoczony przez ogromne zbiorowisko drobnych brył, które właściwie są już obiektami międzygwiazdowymi, ale które zbliżając się przypadkowo do Słońca mogłyby w jego pobliżu stawać się kometami. Ten Obłok Oorta rozciągałby się do odległości 50 000 j.a. i zawierałby – powiedzmy – bilion potencjalnych komet. Choć do dziś jest tworem hipotetycznym, uważany jest przez niektórych badaczy za całkiem realny składnik naszego układu planetarnego.

W następnym roku Gerard Kuiper wysunął inną hipotezę, mianowicie, że w płaszczyźnie Układu Słonecznego w odległości 40–50 j.a. rozciąga się pas okruchów będących resztkami pozostałymi po uformowaniu się planet, a które wskutek rozrzedzenia nie mogły zebrać się w większe globy. Obłok Oorta mógłby stanowić zapas komet długookresowych, które zbliżają się do Słońca z kierunków przypadkowych, podczas gdy Pas Kuipera byłby źródłem komet krótkookresowych, których orbity istotnie leżą niemal w płaszczyźnie Układu Słonecznego.

Aby omawianie tego tematu wyszło poza same spekulacje, niezbędne było zaobserwowanie owych drobnych mieszkańców peryferii Układu. I tak się wreszcie stało, gdy we wrześniu 1992 roku i w marcu 1993 roku amerykańscy astronomowie – David Jewitt i Jane Luu – odkryli dwa ciała oznaczone odpowiednio 1992 QB1 i 1993 FW, o orbitach obszerniejszych niż orbita Plutona. Dziś liczba znanych nowych ciał pozaplutonowych sięga dziesięciu. W ten sposób realność Pasa Kuipera z pewnością przestała być nieprawdopodobna.

Jednak od dziesięciu obiektów do mrowia jest daleko. Jak odkrywać je masowo? Nie można na ślepo patrolować ogromnych obszarów nieba, choćby nawet skupiwszy się na sąsiedztwie ekliptyki, bo żadne obserwatorium nie udostępni wielkiego teleskopu do tak niepewnego przedsięwzięcia. A bez naprawdę wielkiego teleskopu nie da się zaobserwować czegoś w rodzaju planetoidy w odległości większej niż odległość Plutona. Obiekty znalezione przez Jewitta i Luu miały jasność około 23 mag przy rozmiarach szacowanych na 200 km, natomiast obiekt 10-kilometrowy w odległości Neptuna miałby jasność 26 mag. Należało więc opracować inną metodę umożliwiającą wydajniejsze poszukiwania protokomet. I projekt takiej metody istnieje: polega ona na rejestracji zaćmień gwiazd przez te drobne obiekty.

Pierwsza wzmianka na ten temat pochodzi (podobno) od Marka Baileya, wówczas studenta z Edynburga. Zauważył on, że ciała z Pasa Kuipera mogą przesłaniać gwiazdy. Z prostej geometrii wynika, że 1-kilometrowa bryła w Pasie Kuipera ma rozmiar kątowy 0,000 02 – zbliżony zresztą do rozmiaru piłki golfowej zostawionej przez Amerykanów na Księżycu i oglądanej z Ziemi. Duże lub bliskie gwiazdy mają rozmiary katowe większe, ale protokomet może już całkiem przesłonić przeciętną gwiazdę o jasności 13 mag i słabszą. A takich gwiazd jest mnóstwo. Należałoby więc nieprzerwanie śledzić sąsiedztwo ekliptyki (najlepiej na skrzyżowaniu jej z Drogą Mleczną) teleskopami o całkiem skromnych rozmiarach, zaopatrzonymi tylko w specjalistyczne odbiorniki promieniowania. Zaćmienie gwiazdy w tym przypadku oznacza bowiem, że przez teleskop przeleciał cień planetoidy z prędkością średnią 30 km/s (taka jest wszak prędkość Ziemi), co przy rozmiarach cienia rzędu kilometra daje przygaśnięcie gwiazdy na około 30 ms. Aparatura zdolna mierzyć tak szybkie zjawiska nie jest obecnie trudna do zbudowania. Ocenia się, że jeżeli w Pasie Kuipera jest – podobnie jak w obłoku Oorta – około biliona ciał, to jedna gwiazda powinna być zaćmiewana co kilka dni, ale już śledząc 100 gwiazd można by rejestrować zaćmienie częściej niż co godzinę.

Fałszywe zaćmienia mogą, oczywiście, być powodowane przez ptaki, samoloty, sztuczne satelity i in. Aby móc eliminować takie zjawiska, należy zbudować całą sieć teleskopów. Proponowany jest, na przykład,

system stu teleskopów ustawionych w czterech południkowych rzędach co 2 km. Zaćmienie, to właściwe, powinno zostać zarejestrowane zawsze przez co najmniej cztery teleskopy leżące na jednym równoleżniku i to w odstępach czasu określonych przez prędkość orbitalną Ziemi.

Optymiści uważają, że można by nawet wykorzystać rozmycie cienia planetoidy spowodowane dyfrakcją światła na jej krawędziach. Wprawdzie rozmycie to mogłoby utrudnić samo rejestrowanie zaćmienia, ale mogłoby też dostarczyć innej, niezmiernie ważnej informacji. Mianowicie, dyfrakcyjne ugięcie światła zależy od długości jego fali i od odległości przesłony, a więc śledzenie zaćmień w kilku barwach mogłoby doprowadzić do poznania trójwymiarowej struktury Pasa Kuipera!

Tym, co wywołuje pesymizm w tym projekcie, nie jest bynajmniej koszt stu teleskopów. Zauważmy, że w trakcie pracy kilka (może sto) teleskopów musi wykonywać pomiary jasności kilku (może stu) gwiazd w tempie 100 razy na sekundę, w dodatku może w kilku barwach. Każdy pomiar musi być wzbogacony o informację o czasie. Wszystko to razem daje nieprawdopodobne tempo napływania bajtów informacji do komputera, który musiałby je opracowywać. Komputer musiałby właściwie na bieżąco to robić, aby nie udławić się nadmiarem danych. Dlatego oczekuje się, że najdroższą częścią systemu obserwacyjnego będzie komputer, a dokładniej – jego oprogramowanie. Co prawda, jest to zmartwienie na wyrost, bowiem nie ma jeszcze mowy o tym, kto taką sieć teleskopów będzie budował, kiedy, gdzie itd. Idea projektu wydaje się jednak rokować nadzieje.



Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 720. Udowodnić, że dla dowolnej liczby dodatniej x zachodzi:

$$2^{-x} + 2^{-1/x} \leq 1.$$

Rozwiązanie na str. 13

M 721. Funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i istnieją takie stałe $A, B > 0$, że

$$|f(x)| \leq A, \quad |f''(x)| \leq B$$

dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Wykazać, że

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2AB}$$

dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

Rozwiązanie na str. 14

M 722. Funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i taka, że $f(x + \pi) = f(x)$ oraz $f''(x) + f(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Udowodnić, że f przyjmuje tylko wartości nieujemne.

Rozwiązanie na str. 14

Redaguje Jarosław KULPA

F 393. Na brzegu stołu o wysokości 1 m leży kłębek wiotkiego sznurka o długości 100 m. W pewnym momencie jeden z końców sznurka zaczyna zsuwać się na podłogę odwijając się stopniowo z kłęбка. Oszacować, po jakim czasie cały sznurek znajdzie się na podłodze (tarcie pomijamy).
Rozwiązanie na str. 15

F 394. Widmo promieniowania relikтового pokrywa się z widmem promieniowania ciała doskonale czarnego o temperaturze 2,736 K wykazując niewielką anizotropię związaną ze względny ruch układu laboratoryjnego (efekt Dopplera). Oszacować prędkość naszej Galaktyki względem promieniowania relikowego wiedząc, że kierunek, przy którym mierzy się największą anizotropię $a = \Delta T/T = 13 \cdot 10^{-4}$, tworzy kąt $\alpha = 120^\circ$ z kierunkiem prędkości Słońca $v_S = 250$ km/s w ruchu wokół centrum Galaktyki.

Rozwiązanie na str. 15

możliwości, trzeba najpierw odpowiedzieć na pytanie, co znajduje się w porach, jeśli nie ma tam powietrza. W tym celu zwróćmy uwagę na właściwości procesów sublimacji i kondensacji. Jeśli ciśnienie pary przy powierzchni lodu jest niższe niż pewna wartość równowagowa charakterystyczna dla danej temperatury (nazywana ciśnieniem sublimacji), następuje sublimacja. W przeciwnym przypadku następuje kondensacja. Zatem, gdyby początkowo w porach była próżnia, proces sublimacji wprowadziłby w to miejsce parę. Pozostaje problem, czy ta para nie uciekłaby natychmiast na zewnątrz komety przez połączenia między porami. Jeżeli pory są drobne, to i kanaliki między nimi muszą być bardzo cienkie, więc opory przepływu pary przez system porów są bardzo duże. Odptyw pary jest kompensowany przez sublimację i w porach położonych w głębi lodu utrzyma się ciśnienie bliskie wartości równowagowej.

Ciśnienie równowagi lód–para jest rosnącą funkcją temperatury, więc różnica temperatury towarzyszy różnica ciśnienia i przepływ pary.

Rozpatrzmy ponownie por jako cienką rurkę o długości l i promieniu r . Niech przy końcach rurki temperatury będą ustalone i wynoszą T_1 oraz T_2 , a ciśnienia pary odpowiednio p_1 i p_2 . Przy temperaturze 240 K ciśnienie równowagi wynosi około 27 Pa, a przy 140 K – poniżej 10^{-6} Pa. Przy niskim ciśnieniu zderzenia między cząsteczkami pary są rzadkie, a średnia droga swobodna cząsteczek jest duża. Przy ciśnieniu 27 Pa średnia droga swobodna cząsteczek pary wodnej jest rzędu 0,1 mm, a przy ciśnieniu 10^{-6} Pa jest dłuższa od 100 km. Oznacza to, że w temperaturze poniżej 240 K średnia droga swobodna cząsteczek pary jest większa od średnicy rozważanych porów. Wówczas strumień gazu płynący przez rurkę w wyniku istnienia różnicy ciśnienia między jej końcami wynosi w dobrym przybliżeniu

$$\Phi = \left(\frac{32\mu}{9\pi R} \right)^{1/2} \frac{r}{l} \left(\frac{p_1}{(T_1)^{1/2}} - \frac{p_2}{(T_2)^{1/2}} \right) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}} \right].$$

Wielkości μ i R to masa molowa substancji i stała gazowa. Przepływająca para niesie ze sobą energię, której strumień wyraża się jako

$$E = \Phi \left(\frac{N_A}{\mu} 2kT + L \right) \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}} \right].$$

Czynnik $(N_A/\mu)2kT$ to energia kinetyczna jednego kilograma pary i w temperaturze 273 K wynosi około $2,5 \cdot 10^5$ J/kg. Wielkość L jest ciepłem przemiany fazowej i dla wody wynosi około $2,8 \cdot 10^6$ J/kg, czyli o ponad rząd więcej niż wartość energii kinetycznej. Można więc przyjąć, że cząsteczki wody sublimujące na jednym końcu rurki, przepływające do drugiego i tam kondensujące przenoszą energię głównie jako energię przemiany fazowej. Jeśli w równaniu na strumień energii zaniedbamy człon z energią kinetyczną, a równanie na strumień pary przepiszemy w postaci różniczkowej i trochę uprościmy, to otrzymamy

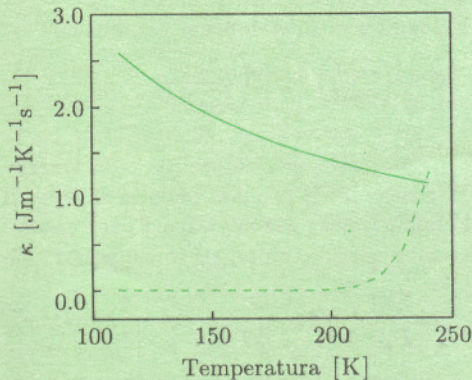
$$E = \left[L \left(\frac{32\mu}{9\pi RT} \right)^{1/2} r \frac{dp}{dT} \right] \left(-\frac{dT}{dx} \right),$$

gdzie x jest odległością mierzoną wzdłuż rurki. Znak minus bierze się stąd, że kierunek przepływu pary, a więc i kierunek przepływu energii, jest przeciwny do kierunku, w którym rośnie temperatura. Człon w nawiasie kwadratowym to, jak łatwo zauważyć, przewodnictwo cieplne rurki. Zauważmy, że w rozważanym modelu porowatości stosunek powierzchni przekroju poprzecznego rurek do całkowitej powierzchni przekroju (w kierunku prostopadłym do rurek) jest równy porowatości. Zatem jeśli prawą stronę równania na strumień energii pomnożymy przez porowatość, to otrzymamy równanie na strumień transportowanej w porach energii na jednostkę powierzchni przekroju porowatego lodu.

Oznaczając porowatość przez ψ możemy napisać, że przewodnictwo cieplne porów w lodzie wynosi w przybliżeniu

$$\kappa_p = \psi L \left(\frac{32\mu}{9\pi RT} \right)^{1/2} r \frac{dp}{dT} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{m K s}} \right].$$

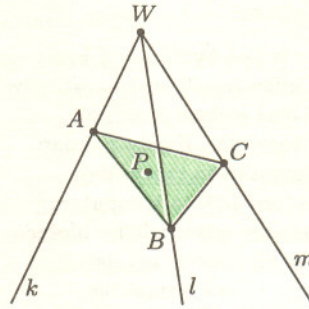
Powyższe rozważania może zilustrować wykres temperaturowej zależności przewodnictwa cieplnego sieci ziarenek lodu (linia ciągła) oraz przewodnictwa cieplnego samych porów (linia przerywana).



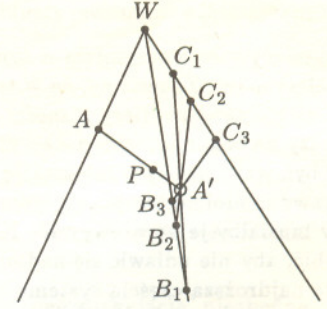
Minimalny czworościan

Jak znaleźć płaszczyznę, która przechodzi przez dany punkt we wnętrzu danego (wypukłego) naroża trójściennego i odcina od niego czworościan o najmniejszej objętości?

Przyjmijmy oznaczenia z rysunku 1. Przypuśćmy, że punkt A został wybrany właściwie. Oznaczmy przez A' punkt przecięcia prostej AP z nie zawierającą A ścianą naroża. Poszukajmy takiego odcinka BC leżącego w tej ścianie i przechodzącego przez A' , by pole trójkąta ABC było najmniejsze z pól możliwych trójkątów AB_iC_i (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

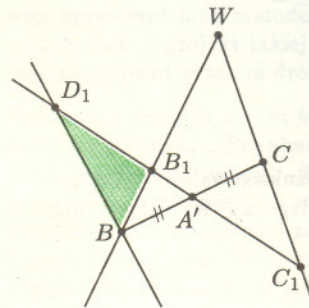
Właściwy wybór B i C to taki, gdy A' jest środkiem BC . Istotnie, każdy inny wybór powiększa pole: na rysunku 3

$$\begin{aligned} P_{WBC} = P_{WB_1A'} + P_{BB_1A'} &< P_{WB_1A'} + P_{BD_1A'} = \\ &= P_{WB_1A'} + P_{CC_1A'} = P_{WB_1C_1}. \end{aligned}$$

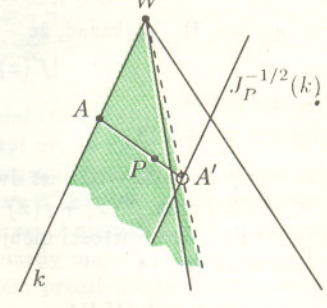
Pozostaje zatem pytanie, dla jakiego punktu A otrzymuje się najmniejszą objętość czworościanu $WABC$. Skoro jednak prosta AP ma przecinać odcinek BC w jego środku, to – z symetrii zadania wynika, że BP przechodzi przez środek AC , natomiast CP przez środek AB . Słowem:

P ma być środkiem ciężkości trójkąta ABC .

W szczególności powinno więc być $AP = 2 \cdot PA'$, co jednoznacznie określa A' .



Rys. 3



Rys. 4

Co więcej, rozwiązanie zadania jest konstruktywne. Oto algorytm:

- przecinamy obraz prostej k w jednokładności o środku P i stosunku $-\frac{1}{2}$ z płaszczyzną mk otrzymując punkt A' (rys. 4);
- przecinamy obraz prostej l w symetrii środkowej względem punktu A' z prostą m otrzymując punkt C ;
- przecinamy proste $A'P$ i k otrzymując punkt A ;
- przecinamy proste $A'C$ i l otrzymując punkt B .

Uzasadnienie tego, że algorytm daje ABC , którego środkiem ciężkości jest P , można łatwo uzyskać przeglądając *Małą Deltę* w tym numerze. Potrzebna jest także informacja, że poszukiwany minimalny czworościan musi istnieć. Zdobycie jej też nie jest trudne, ale to pozostawię już wyłącznie inwencji Czytelnika.

Marek KORDOS

O liczbach przestępnych

W artykule Roberta Hajłasza „Dowody niewymierności pewnych liczb” (*Delta* 10/1994) wspomniane zostało, że liczba $\sqrt{2}\sqrt{2}$ jest niewymierna. Okazuje się, że w pewnym sensie jest ona nawet „bardzo niewymierna”. Co przez to rozumiemy – okaże się za chwilę. Ale najpierw pewna definicja.

Liczbą algebraiczną nazywamy dowolny pierwiastek równania algebraicznego

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

o współczynnikach całkowitych.

I tak dowolna liczba wymierna p/q jest algebraiczna, jako że jest ona pierwiastkiem równania $qx - p = 0$. Można też wykazać, że wszystkie liczby wyrażające się za pomocą czterech podstawowych działań oraz pierwiastkowania, wykonywanych na liczbach całkowitych, są algebraiczne, tj. algebraiczne są wszystkie liczby postaci $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3 + \sqrt{5}}$, $\sqrt{\sqrt{2} + 5} / \sqrt[3]{9}$... itd. Liczby, które nie są algebraiczne, nazywamy *przestępnymi*. Ponieważ liczby wymierne są algebraiczne, więc liczby przestępne są niewymierne. A skoro liczb przestępnych nie da się również przedstawić za pomocą czterech podstawowych działań oraz pierwiastkowania, wykonywanych na liczbach całkowitych, więc liczby przestępne są w pewnym sensie nawet „bardzo niewymierne”. Ale, czy liczby przestępne... istnieją? Innymi słowy, czy istnieje choć jedna liczba, która nie jest pierwiastkiem równania algebraicznego o współczynnikach całkowitych?

Choć problemem istnienia liczb przestępnych interesował się już Leonhard Euler, to jednak pierwszym, który udowodnił (w 1844 r.) ich istnienie, był Joseph Liouville (patrz *Delta* 1/1993). Konkretnie liczby, o których udowodnił, że są przestępne, były jednak nieciekawe – w tym sensie, że zapewne nikt nigdy ich nie użył przy rozpatrywaniu innych problemów matematycznych. Istotny postęp nastąpił, gdy w 1873 roku Charles Hermite udowodnił, że liczba e jest przestępna, i gdy dziewięć lat później Ferdinand Lindemann uczynił to samo w stosunku do liczby π . O ważności liczb e oraz π nikogo nie trzeba przekonywać. Co więcej, z przestępności liczby π wynika niewykonalność kwadratury koła cyrklem i linijką.

Pod koniec XIX wieku było też wiadomo, że liczb przestępnych jest bardzo, bardzo dużo, choć nie wiadomo było (poza pewnymi konkretnymi przypadkami), jak rozstrzygnąć, czy konkretnie wskazana liczba jest przestępna.

Taki był mniej więcej „stan meczu” w chwili, gdy David Hilbert w 1900 roku na II Międzynarodowym Kongresie Matematycznym wśród słynnych 23 problemów sformułował problem następujący:

Udowodnić, że jeżeli $a \neq 0$, $a \neq 1$ jest liczbą algebraiczną, b zaś jest liczbą algebraiczną i niewymierną, to liczba a^b jest przestępna.

Dowód został podany dopiero w 1934 roku (niezależnie) przez

A.O. Gelfonda oraz T. Schneidera. W szczególności wynika stąd, że $\sqrt{2}\sqrt{2}$ jest liczbą przestępna, a więc również niewymierną. Mimo iż wydaje się, że problem Hilberta dotyczy liczb bardzo szczególnej postaci, to jednak ma on daleko nieoczywiste konsekwencje, bowiem wynika z niego, między innymi, następujący fakt:

Jeśli w trójkącie równoramiennym stosunek kąta przy podstawie do kąta przy wierzchołku jest liczbą algebraiczną niewymierną, to stosunek długości podstawy do długości ramienia jest liczbą przestępna.

Z rozwiązania wspomnianego problemu Hilberta wynika również, że wszystkie wartości logarytmów, których przybliżenia możemy znaleźć w tablicach, są albo wymierne, albo przestępne.

Opracował P.H.

Wykres ten został sporządzony na podstawie rozważanego do tej pory przybliżonego geometrycznego modelu porowatości. Jest więc także przybliżony. Użyte wartości parametrów są następujące: porowatość $\psi = 0,5$, promień porów $r = 10^{-4}$ m, masa molowa H_2O wynosi $\mu = 0,018$ kg/mol, a stała gazowa $R = 8,314$ J/K.mol. Przewodnictwo cieplne nieporowatego lodu jest funkcją temperatury. Została przyjęta typowa dla dielektryków zależność typu $\kappa \sim \frac{1}{T}$:

$$\kappa_l = 567/T \left[\frac{J}{m K s} \right],$$

ze współczynnikami proporcjonalności wyznaczonym doświadczalnie.

Omówiony sposób obliczania przewodnictwa cieplnego porowatego lodu można zastosować do jądra komety i obliczyć szybkość przenikania ciepła w głąb jądra. Okaże się wówczas, że w przypadku niektórych komet stwardniała skorupa zlepionych ziarenek lodu grubieje na tyle szybko, że pobranie próbki z powierzchni jądra może być trudne i wymagać zastosowania nietypowych metod.

Na koniec warto zastanowić się, w jaki sposób przewodnictwo cieplne porowatego lodu zmienia się po wprowadzeniu do porów powietrza (gazu innego niż para). W najbardziej interesującym przypadku, czyli na Ziemi, ciśnienie pary w porach jest małe w porównaniu z ciśnieniem powietrza. Z tego względu decydującym czynnikiem ograniczającym szybkość przepływu pary jest nie rozmiar porów, ale zderzenia z cząsteczkami powietrza. W konsekwencji przewodnictwo cieplne porów jest znacznie mniejsze i nie należy się spodziewać, aby porowaty lód miał większe przewodnictwo niż nieporowaty.

Liczby Liouville'a to liczby postaci

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^{i!}},$$

gdzie c_i są dowolnie wybieranymi cyframi różnymi od zera.

Dowód, że są one przestępne, jest bardzo podobny do dowodu przestępności liczby

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i!}}$$

zamieszczonego w *Delcie* 1/1993.

Ciekawostka:

Liczba 0,12345678910111213..., w której po przecinku występują jedna za drugą kolejne liczby naturalne, jest przestępna (Kurt Mahler). Czytelnikom pozostawiamy jako nietrudne ćwiczenie dowód, że powyższa liczba jest niewymierna (bezpośrednio, bez korzystania z faktu, że jest przestępna).