epsilon
7/95
(53)

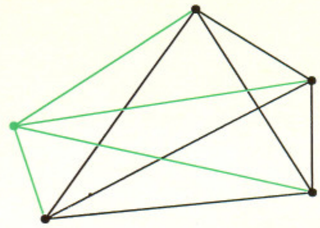
Zabawy z zapałkami

Istnieje wiele łamigłówek związanych z układaniem zapałek. Jedną z najbardziej znanych jest zadanie: z sześciu zapałek ułożyć cztery przystające trójkąty. Oczywiście, nie wolno zapałek łamać ani kłaść w ten sposób, żeby jedna zapałka leżała na drugiej. A zatem muszą to być trójkąty równoboczne, bokami których są zapałki. Zadanie rozwiązuje się prosto, lecz nietypowo. Słowem, które myli, jest „ułożyć"; gdyby napisać „zbudować", sprawa, być może, byłaby zupełnie jasna. Z sześciu zapałek można zbudować czworościan foremny – trzeba po prostu „wyjść" z płaszczyzny.

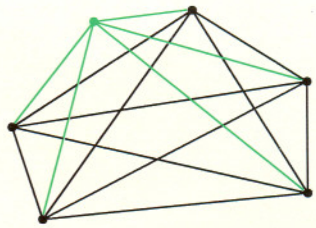
A oto zadanie podobne: używając dziesięciu zapałek ułożyć dziesięć trójkątów równobocznych. Czy jest to wykonalne? Tu zamiana „ułożyć" na „zbudować" niewiele daje, bowiem takiej konfiguracji nie da się uzyskać w przestrzeni trójwymiarowej, co wcale nie znaczy, że coś takiego nie istnieje w ogóle.

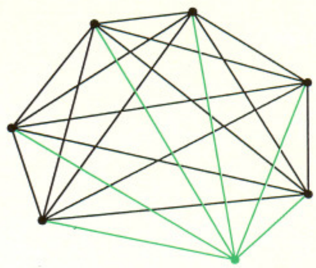
Żeby rozstrzygnąć powyższy problem, wystarczyłoby znaleźć pięć takich punktów, że każdy z nich jest tak samo odległy od pozostałych. Zauważmy, że trzy punkty o tej własności wyznaczają trójkąt równoboczny, cztery – czworościan foremny, a pięć... Tak, konfiguracja jest możliwa w przestrzeni czterowymiarowej. Wspomniane pięć punktów wyznacza figurę, która jest uogólnieniem na cztery wymiary trójkąta równobocznego i czworościanu foremnego – nazywa się ją sympleksem czterowymiarowym (foremnym) lub 5-komórką. Druga nazwa bierze się stąd, że twór ten składa się z pięciu czworościanów foremnych (rys. 1).

Zabawę z zapałkami można kontynuować, choć już raczej tylko teoretycznie, gdyż liczba potrzebnych zapałek staje się coraz większa i potrzeba coraz więcej wymiarów. I tak z piętnastu można (teoretycznie) skonstruować dwadzieścia trójkątów, a z dwudziestu jeden zapałek – trzydzieści pięć trójkątów. Będą to odpowiednio sympleksy pięcio i sześciowymiarowe, naturalnie wszystkie foremne (rys. 2).



Rys. 1





Rys. 2

Nietrudno podać ogólny przepis tworzenia n-wymiarowych sympleksów foremnych. Należy wziąć $n+1$ punktów jednakowo odległych od siebie i połączyć każdy z każdym odcinkami (zapałkami); jest ich $\binom{n+1}{2}$. Będą to krawędzie sympleksu. Uzyskamy również w ten sposób $\binom{n+1}{3}$ trójkątów – dwuwymiarowych ścian. Ścian k-wymiarowych będzie $\binom{n+1}{k+1}$.

W ten sposób zabawa z zapałkami doprowadziła nas do stosunkowo prostych obiektów wielowymiarowych, które jednak w matematyce odgrywają istotną rolę – ale to już zupełnie inna historia.

Zdzisław POGODA

Każdy wie, jak najprościej podzielić tort na dwie równe części. A na cztery części? To także nie jest trudne, dwa cięcia wystarczą – wzdłuż dwóch prostopadłych płaszczyzn tniemy przysmak na cztery równe kawałki.

Łatwo można powyższą metodę zastosować w przypadku podziału tortu na osiem części, choć może nie będzie to klasyczne krojenie tortu – robimy to trzema cięciami, przy czym trzecie cięcie wykonujemy płaszczyzną prostopadłą do dwóch poprzednich, równolegle do płaszczyzny podstawy.

A jeśli zachodzi potrzeba pokrojenia tortu na szesnaście kawałków czterema cięciami? Wydaje się to niemożliwe, ale (gdy tort jest czterowymiarowy) matematyk sobie z tym poradzi. Wystarczy w czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej wykonać cztery cięcia płaszczyznami do siebie wzajemnie prostopadłymi. Morał – gdy przyjdzie dużo gości, potrzeba więcej miejsca.

Wieść niesie, że gdy wybitny fizyk, Leopold Infeld, przyjechał do Polski po okresie współpracy z Einsteinem, wygłosił w Krakowie dla licznie zgromadzonych słuchaczy wykład o teorii względności. Zaangażowany emocjonalnie w przedstawiany materiał mówił w sposób zaawansowany, trudny, nie zdając sobie sprawy z tego, że słuchacze siedzą „jak na tureckim kazaniu". W dyskusji jako pierwszy zabrał głos inny znakomity fizyk, Jan Weysenhoff, który oznajmił prelegentowi, że wykład był niezrozumiały. „Ja, na przykład" – powiedział „ – zrozumiałem z tego wszystkiego, no, może pięć procent."

„Jak to, pięć procent?" – obruszył się Infeld. – „Przecież to bardzo proste! Czterowymiarowa przestrzeń, rozważamy ten czterowektor..." – i gestykulując przedstawił jeszcze raz kilka swoich głównych myśli.

„No tak, rzeczywiście" – odpowiedział zamyślony Weysenhoff. – „Bierzemy ten czterowektor, racja... No, niech będzie sześć procent!".

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.