

# Między matematyką czystą i stosowaną

Andrzej PELCZAR

Treść będzie przekorna in stosunku do tytułu. Uważam bowiem, że nie można przeprowadzić żadnego rozsądnego rozgraniczenia między tzw. matematyką czystą a stosowaną. Przede wszystkim bardzo ryzykowne byłoby każde stwierdzenie o „niestosowalności” jakiegoś wyniku czy nawet teorii, „niestosowalności w ogóle”, nawet w takim przypadku, gdy w tej chwili nie widać żadnych zastosowań praktycznych (o takich zastosowaniach myśli się przecież mówiąc o „matematyce stosowanej”).

Historia zna przypadki bardzo długiego czekania na zastosowania. Jako podręcznikowy i spektakularny przykład przytacza się teorię krzywych drugiego stopnia (stożkowych) pochodzącą od Apoloniusza (około 200 lat przed Chrystusem), którą w początkach wieku XVII, a więc po około 1800 latach, zastosował Kepler poprawiając teorię kopernikańską.

Znacznie bliższy przykład można znaleźć w polskiej historii matematyki. W latach trzydziestych dwaj matematycy – Stanisław Krystyn Zaremba w Krakowie i A. Marchaud w Paryżu zaproponowali pewne uogólnienia równań różniczkowych (jeden nazwał je równaniami kontyngensowymi, drugi paratyngensowymi). Opowiadał mi Profesor Ważewski o bardzo wstrzemięźliwym (delikatnie mówiąc) przyjęciu tych pomysłów przez większość matematyków w owym czasie; uważano je za „sztuczne” i bez żadnych widoków na jakiegokolwiek rozsądne zastosowania. A były to, jak się okazało po mniej więcej ćwierćwieczu, początki teorii inkluzji różniczkowych i teorii optymalnego sterowania, mających, oczywiście, teraz multum zastosowań. Pokazał to, w latach pięćdziesiątych, właśnie Tadeusz Ważewski. Inny przykład to zastosowania w konstrukcjach komputerów beznawiasowej notacji Łukasiewicza, a więc niezwykle „abstrakcyjnego” pomysłu z logiki formalnej. Znane są dobrze sytuacje odwrotne. Rozwój teorii nie nadążał za potrzebami fizyki czy techniki i matematycy musieli czasem, *ex post* niejako, „dorabiać” podstawy do czegoś, co... funkcjonowało nieformalnie. Tak było z teorią dystrybucji, którą stworzono po tym, jak Dirac już zdążył posłużyć się swymi „funkcjami”.

Jest jeszcze inny argument za tym, by uznać za praktycznie niemożliwe rozgraniczenie matematyki „czystej” i stosowanej”. Jeśli przyjmiemy, że teoria równań różniczkowych jest „stosowalna”, to trudno będzie powiedzieć, że nie są stosowalne te części topologii ogólnej i algebraicznej lub analizy funkcjonalnej czy algebry liniowej, dzięki którym otrzymujemy ważne i mocne twierdzenia o równaniach różniczkowych (w tym np. twierdzenia o stabilności mające bezpośrednie zastosowania techniczne). Tak więc okaże się, że bardzo „abstrakcyjne” wyniki bardzo „abstrakcyjnych” teorii mają zastosowania.

To, co powiedziano wyżej, powinno stanowić dostateczny argument na rzecz takiego poglądu: nie powinno się mówić o matematyce „czystej” i „stosowanej”, lecz o matematyce i o zastosowaniach matematyki. No i trzeba zauważyć, iż nie będzie chyba zbyt ryzykowne stwierdzenie, że – po prostu – matematyka jest stosowalna, a na pewno bardzo ryzykowne byłoby orzekanie o niestosowalności jakiejś jej części.

Minęły na szczęście (sceptycy mogą mieć wątpliwości...) czasy, gdy „nauki stosowane” uważano za lepsze od tych innych, „niestosowanych”. Dlatego powyższych uwag nie należy traktować jako obrony matematyki przez udowadnianie, że jest stosowana lub raczej stosowalna. Jestem od takiego stanowiska bardzo daleki. Po prostu... nie podobają mi się terminy często używane, a wymienione w tytule!

## Jaki jest mechanizm segregacji ziaren różnej wielkości w materiałach sypkich?

Maria

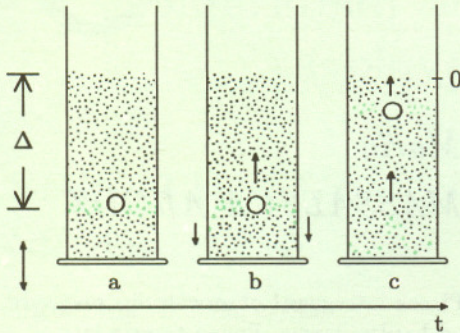
MASSALSKA-ARODŹ

Piasek intrygował obserwatorów przyrody od bardzo dawna. Ponad trzysta lat temu Robert Hooke analizując prawo Archimedesesa dla cieczy zauważył, że można je zastosować również do piasku, jeśli tylko wprawimy naczynie z piaskiem in drgania (patrz *Mała Delta* 10/1992). Stwierdził, że w układzie drgających ziaren ciała o większym ciężarze właściwym toną, lżejsze zaś wydostają się na powierzchnię zupełnie tak, jak to się dzieje w cieczach. Piasek posłużył Hooke’owi do wysunięcia rewolucyjnej hipotezy, iż wszystkie substancje, bez względu na stan skupienia, składają się z małych drgających kulek. Pogląd ten stanowi do dziś podstawę kinetyczno-molekularnej teorii budowy ciał. Jednak, jak to często bywa, prawda okazuje się bardziej złożona, gdy przejdziemy do szczegółów. Prawo Archimedesesa opierające się na bilansie jedynie dwóch sił, tj. siły ciężkości i wyporu, nie wystarcza do opisu zjawiska, które obserwowali Państwo zapewne sami stwierdzając, że w często potrząsanym wiaderku z piaskiem na powierzchnię wydostają się stopniowo wszystkie większe kamyczki i już tam pozostają pomimo dalszych potrząsań. A zatem w układach nawet sypkich ciał o większym ciężarze właściwym nie toną, ale „wypływają” na powierzchnię, jeśli tylko ich ziarna są większe od ziaren układu sypkiego, w którym są „zanurzone”.

Do niedawna za przyczynę takiego zachowania się większych ziaren uważano fakt, że każdy wstrząs popycha ziarna ku górze, a pustą przestrzeń pozostawioną przez duże ziarno łatwo wypełniają mniejsze ziarenka. Duże ziarno jest w ten sposób wynoszone coraz wyżej. Taki mechanizm prowadzący do segregacji

## Drgania powierzchni Ziemi wywołane przez wodospady

ziaren ze względu na ich rozmiar, niezależnie od ciężaru właściwego, potwierdziły przeprowadzone nie tak dawno eksperymenty komputerowe. Znaleźli się jednak dociekliwi, którzy z kolei postanowili zweryfikować rezultaty modeli komputerowych w prawdziwym eksperymencie z kolorowymi kulkami szklanymi różnej wielkości.



Rys. 1

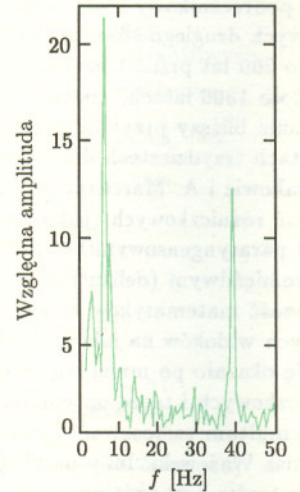
Na rysunku 1a przedstawiony jest cylinder, który poddawano regularnym sinusoidalnym drganiom o amplitudzie przyspieszenia równej  $7g$  ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ), czyli wyraźnie większej niż stosowana w doświadczeniach z transmisją drgań akustycznych (patrz *Delta* 6/1995). Wypełniono go małymi przezroczystymi kulkami o średnicy  $0,2 \text{ cm}$ , które zaznaczono na rysunku kropkami. Do cylindra włożono dodatkowo kulkę znacznie większą – o średnicy  $1,9 \text{ cm}$  – umieszczając wokół niej małe kulki, takie jak te, które wypełniały cały cylinder, ale dla ułatwienia obserwacji zabarwione na czarno (na rysunku są one kolorowe). Rysunek 1a przedstawia początkowe ułożenie kulek w cylindrze. Kolejne rysunki (1b i 1c) pokazują, jak to ułożenie zmienia się w miarę upływu czasu, gdy cylinder był poddawany regularnym wstrząsom. Autorzy doświadczenia, James B. Knight, H.M. Jaeger oraz Sidney Nagel [1], stwierdzają wyraźnie, że w wyniku wstrząsań duże ziarno podąża ku górze wraz z otaczającymi je małymi ziarnami (zaznaczonymi na rysunku 1 grubszymi kropkami) wbrew powszechnemu oczekiwaniu, że będą one spadać w dół. Natomiast w dół zniżają się – ku zaskoczeniu obserwatorów – ziarna odległe od „olbrzyma”, położone w pobliżu ścian naczynia. Ponadto, można zauważyć, że gdy dojdą one do dna naczynia, wówczas same zaczynają również uczestniczyć w ruchu ku górze, który to ruch trwa nieprzerwanie środkiem naczynia. Gdy duże ziarno dotrze do

W jednym z zadań zamieszczonych w *Delcie* 2/1995 postawiłem następujące pytanie: jaka jest wysokość wodospadu, jeśli stojąc w jego pobliżu czujemy drgania gruntu o częstotliwości  $f$ ? Rozwiązanie zadania opierało się na założeniu, że w spadającej kolumnie wody powstaje fala stojąca o węźle u podnóża i strzałce przy górnej krawędzi wodospadu. Wtedy wysokość wodospadu jest równa jednej czwartej długości fali dźwiękowej, czyli

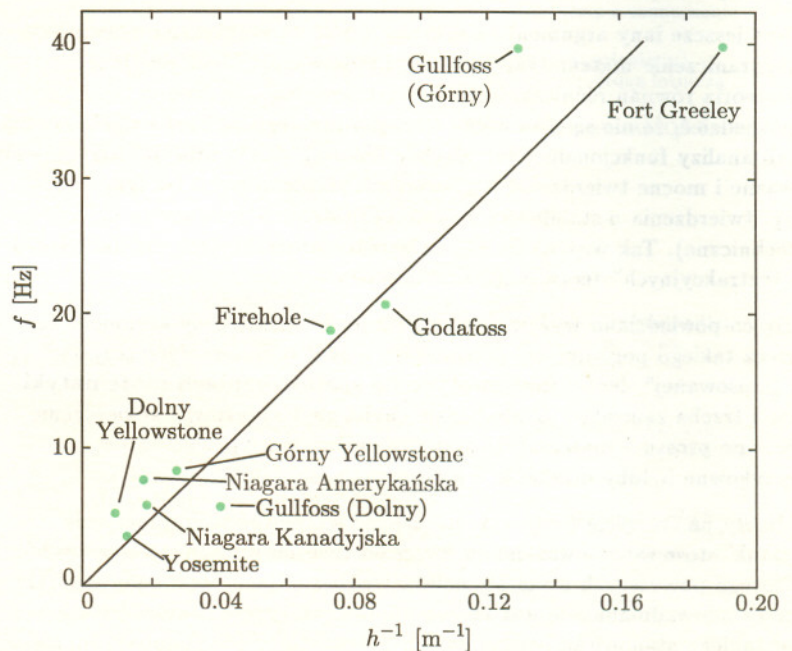
$$h = \frac{v}{4f},$$

gdzie  $v$  jest prędkością dźwięku w wodzie. Powyższy wzór nie jest ścisły: posługując się nim zakładamy, że woda spada pionowo, a krawędź przelewu jest ostra, co nie zawsze jest prawdą.

W naturalny sposób może pojawić się następujące pytanie: czy jest tak rzeczywiście, czy też jest to problem wydumany? Odpowiedź na nie przynoszą dane doświadczalne. Pod koniec lat sześćdziesiątych John S. Rinehart z Boulder w stanie Colorado (USA) zbadał dokładnie drgania gruntu w pobliżu dziewięciu wodospadów (o wysokości od  $5 \text{ m}$  do  $93 \text{ m}$ ) Islandii, Alaski i kontynentalnej części USA. Okazuje się, że widmo drgań powierzchni Ziemi charakteryzuje się istnieniem silnie dominującej częstotliwości oraz nieregularnego tła, jeśli tylko spadek wody nie jest zbyt zakłócony, na przykład przez występy skalne. Silne tło istnieje w przypadku szerokich wodospadów, takich jak Niagara, ale nadal towarzyszy mu dominująca częstotliwość. Jeśli wodospad ma kilka kaskad, obserwuje się kilka dominujących częstotliwości odpowiadających każdej z nich.



Rys. 1. Widmo drgań gruntu wywołanych przez wodospad Gullfoss. Wykresy pochodzą z artykułu Johna Rineharta „Waterfall-Generated Earth Vibrations”, *Science*, vol. 164 (1969).



Rys. 2. Dominująca częstotliwość drgań gruntu w zależności od odwrotności wysokości wodospadu.

Przykładem może być szeroki dwuczęściowy islandzki Gullfoss (widmo jego drgań przedstawia rys. 1), charakteryzujący się dwiema dominującymi częstotliwościami: 6 Hz i 40 Hz, odpowiadającymi dwu kaskadom o wysokościach 27 m i 7,5 m. Pierwsza z tych częstotliwości należy do kategorii infradźwięków, druga mieści się w zakresie akustycznym. Rysunek 2 przedstawia dane dotyczące szczegółowo zbadanych przez Rineharta wodospadów, a dokładniej, zależność częstotliwości drgań od odwrotności wysokości wodospadu.

Zależność tę w zadowalającym przybliżeniu można określić jako liniową. Nachylenie prostej z rysunku 2 jest równe 250 m/s, czyli około jednej czwartej prędkości dźwięku w wodzie. Największe odstępstwa od liniowości obserwuje się dla niskich wodospadów, co prawdopodobnie bierze się stąd, że w rzeczywistości strzałka powstaje poniżej górnej krawędzi wodospadu, a zatem względny błąd jest tym mniejszy, im wyższy jest wodospad. W przypadku wodospadu Gullfoss łatwo można sprawdzić, że jest akurat odwrotnie; zgodność z doświadczeniem jest dobra dla niższej kaskady, dla wyższej błąd wynosi około 50%...

Nieregularne tło szumów częściowo jest zjawiskiem zewnętrznym, częściowo zaś także efektem działania wodospadu. Na rysunku 1 widać, że jest ono podwyższone w obszarze niskich częstotliwości; jest to charakterystyczne szczególnie dla wysokich wodospadów. Przyczyny tego zjawiska należy upatrywać w fakcie, że spadek wody jest przepływem turbulentnym; strumień rozpada się na liczne wiry, których rozmiary rosną podczas spadania. Efektem turbulencji są dość nieregularne silne uderzenia dużych mas wody o podstawę wodospadu, generujące drgania o niskich częstotliwościach.

Krzysztof REJMER



## Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

**M 744.** Podzielić koło na trzy części o równych polach, z których każda ma taki sam obwód, jak całe koło.

Rozwiązanie na str. 7

**M 745.** Stosując nierówność Younga (patrz artykuł Grzegorza Łukaszewicza „Wokół nierówności Younga” na str. 4) udowodnić, że dla wszystkich  $x, y \geq 0$  oraz dowolnej liczby naturalnej  $k$  mamy

$$(x + y)^k \leq 2^{k-1}(x^k + y^k).$$

Rozwiązanie na str. 7

**M 746.** Niech  $x_1 = 1995^{1995}$ . Dla  $n \geq 2$  definiujemy  $x_n = S(x_{n-1})$ , gdzie  $S(m)$  oznacza sumę wszystkich cyfr liczby naturalnej  $m$  (zapisanej w układzie dziesiętnym). Obliczyć  $x_5$ .

Rozwiązanie na str. 6

Redaguje Adam KOROCIŃSKI

**F 409.** Oszacować liczbę cząsteczek w atmosferze Ziemi. Dany jest promień Ziemi  $R = 6400$  km, masa molowa powietrza  $\mu = 0,029$  kg/mol i ciśnienie atmosferyczne na poziomie morza  $p_0 = 1$  atm.

Rozwiązanie na str. 6

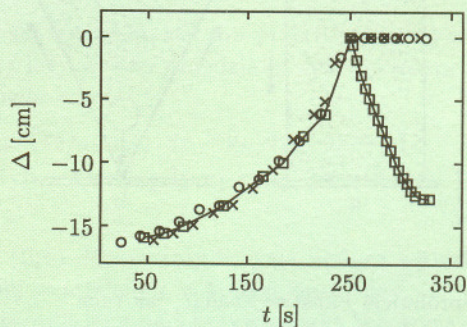
**F 410.** Do naczynia nalano pewną ilość czterochloru węgla  $\text{CCl}_4$ , a następnie warstwę wody tak, by nie zmieszać obu substancji. Przy normalnym ciśnieniu atmosferycznym woda wrze w temperaturze  $100^\circ\text{C}$ , a czterochlorek węgla w temperaturze  $76,7^\circ\text{C}$ . W trakcie powolnego ogrzewania naczynia na granicy rozdziału cieczy wrzenie rozpoczyna się w temperaturze  $65,5^\circ\text{C}$ . Wyjaśnić, dlaczego.

Rozwiązanie na str. 6

powierzchni, już tam pozostaje, bo nie może się włączyć w wąski strumień, jaki przy ścianie naczynia tworzą małe ziarna przemieszczające się ku dołowi. Jeśli natomiast do powierzchni dotrą małe ziarna, to nic nie stoi na przeszkodzie, by kontynuowały ruch ku ścianie naczynia, a następnie wzdłuż ścian w kierunku dna. Okazuje się, że w wibrującym z odpowiednią amplitudą cylindrze ruch konwekcyjny ziaren odbywa się regularnie środkiem naczynia, jak w fontannie, i bokami naczynia w dół, nawet wówczas, gdy wszystkie ziarna mają jednakową wielkość. Większe ziarna są jedynie porywane przez strumień małych ziaren wędrujących ku górze!

Co było przyczyną, że modele komputerowe potwierdzały wcześniejszą interpretację zjawiska segregacji ziaren? Aby to rozstrzygnąć, powtórzono poprzednie doświadczenie, ale dla cylindra o wypolerowanych ściankach. Okazało się, że wówczas ruch konwekcyjny jest wyraźnie utrudniony. Konwekcja może zachodzić dzięki oddziaływaniom kulek (ziaren) ze ściankami naczynia, a więc dzięki siłom tarcia. Tego oddziaływania nie uwzględniały modele komputerowe! Segregacja była w nich wynikiem zderzeń sąsiadujących ze sobą kulek o różnych rozmiarach.

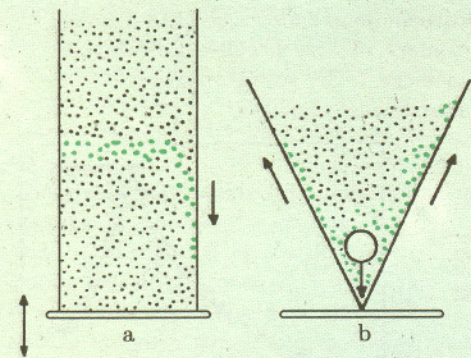
Po stwierdzeniu faktu, że segregacja ziaren jest następstwem ruchu konwekcyjnego, ciekawa wydała się analiza samego zjawiska konwekcji. Powtórzono zatem doświadczenie zmieniając każdorazowo rozmiary większych kulek. Porównanie przebiegu ruchu konwekcyjnego przedstawia rysunek 2.



Rys. 2

Funkcja  $\Delta(t)$ , czyli odległość  $\Delta$  dużego ziarna od powierzchni naczynia w zależności od czasu, jest identyczna dla różnych rozmiarów ziaren aż do momentu, gdy osiągną one powierzchnię naczynia. Potem ziarna o rozmiarach 1,9 cm

oraz 0,6 cm (których ruch pokazują odpowiednio kółka i krzyżyki) już tam pozostają, a małe ziarna (dla których  $\Delta(t)$  oznaczono kwadracikami) podążają coraz wolniej w dół. Rysunek pokazuje ciekawy fakt: Otóż zależność  $\Delta(t)$  jest wyraźnie nieliniowa. Inaczej można powiedzieć, że prędkość  $d\Delta(t)/dt$  przemieszczania się dużego ziarna nie zależy od stosunku promieni ziaren dużych i małych, natomiast rośnie wraz ze zmniejszaniem się odległości dużego ziarna od górnej powierzchni. Im większa amplituda drgań, tym bardziej stroma jest zależność  $\Delta(t)$ , czyli tym szybciej narasta tempo zbliżania się ziarna do powierzchni naczynia. Natomiast istnieje pewna krytyczna amplituda potrząśnięcia cylindrem, poniżej której konwekcja przestaje zachodzić. Nie możemy też wywołać ruchów konwekcyjnych dla upakowania ziaren większego niż pewne upakowanie krytyczne (np. gdy ubity piasek zamkniemy ciasno w naczyniu). Można również zauważyć, że gdy wypolerujemy jedynie jedną ściankę naczynia, wówczas wzory, jakie w naczyniu tworzą poruszające się ziarna, przestaną być symetryczne, jak to pokazuje rysunek 3a. Zależność ruchu konwekcyjnego od oddziaływań ziaren ze ściankami potwierdza inna obserwacja. Kierunek przemieszczania się większego ziarna można zmienić, gdy doświadczenie przeprowadzimy w naczyniu zważającym się ku dołowi. Przy takiej geometrii większe ziarna będą na stałe uwięzione na dnie naczynia (rys. 3b).



Rys. 3

Spróbujcie Państwo zbadać, jak ruch konwekcyjny zależy od nachylenia ścian potrząśanego cylindra. Pytanie, przy jakim nachyleniu ścian naczynia ruch konwekcyjny ustanie, nadal czeka na odpowiedź!

[1] James B. Knight, H.M. Jaeger i Sidney R. Nagel, *Physical Review Letters*, **70**, 3728 (1993).

## Wokół nierówności Younga

Grzegorz ŁUKASZEWICZ

W miesięczniku *Delta* co pewien czas pojawiają się artykuły o ważnych nierównościach i ich dowodach. Niniejszy artykuł nawiązuje do tej tematyki.

Będziemy rozważać pewną nierówność, zwaną **nierównością Younga**, i jej naturalne otoczenie, czyli kilka innych ważnych nierówności będących bardzo bliskimi jej konsekwencjami.

Przedstawiamy

### Nierówność Younga

Jeśli  $x$  i  $y$  są dowolnymi liczbami nieujemnymi, a liczby dodatnie  $p, q$  spełniają warunek  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , to

$$(1) \quad xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $y = x^{p-1}$ .

Zanim udowodnimy nierówność Younga, rozejrzyjmy się nieco wokół niej. Zauważmy przede wszystkim, że można ją zapisać także w postaci

$$(2) \quad a_1^{q_1} \cdot a_2^{q_2} \leq q_1 \cdot a_1 + q_2 \cdot a_2,$$

gdzie  $a_1, a_2 \geq 0$ ,  $q_1, q_2 > 0$ ,  $q_1 + q_2 = 1$  (równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 = a_2$ ). Nierówność (2) powinna się wydać bliska Czytelnikom *Delty*, kładąc bowiem  $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$ , dostajemy dobrze znaną **nierówność dla średniej arytmetycznej i geometrycznej** dla dwóch składników:

$$(3) \quad (a_1 \cdot a_2)^{1/2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Szczególnym przypadkiem nierówności Younga jest bardzo często używana, elementarna nierówność

$$(4) \quad xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

będąca także przypadkiem szczególnym **nierówności Cauchy'ego-Schwarza**

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}.$$

Ostatnia nierówność wyraża fakt, że iloczyn skalarny wektorów  $a = (a_1, \dots, a_n)$  i  $b = (b_1, \dots, b_n)$  w  $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest nie większy niż iloczyn długości tych wektorów (jest mniejszy, jeśli wektory te nie są równoległe). Uogólnieniem nierówności Cauchy'ego-Schwarza jest bardzo ważna **nierówność Höldera**

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q},$$

prawdziwa dla  $a_i \geq 0$ ,  $b_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  i dla takich  $p, q > 0$ , że  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Z nierówności Höldera wynika łatwo podstawowa **nierówność Minkowskiego**

$$(7) \quad \left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p},$$