

Nierówność Fejéra–Jacksona

Jarosław GÓRNICKI

Kilka lat temu od zaprzyjaźnionego matematyka niemieckiego otrzymałem wydaną w 1987 roku książkę pod znamionym tytułem „Die 100 schönsten Aufgaben aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR mit eleganten Lösungen, Klassenstufen 11/12”.

Przeglądając ją ostatnio zatrzymałem się na zadaniu 34:

Udowodnić, że dla wszystkich $x \in (0, \pi)$ prawdziwa jest nierówność

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x > 0.$$

Zadanie jak zadanie – pomyślałem, wziąłem kartkę papieru i nierówność uzasadniłem. Wystarczyły standardowe wzory trygonometryczne na $\sin 2x$, $\sin 3x$ i kilka przekształceń – nic nadzwyczajnego. Sięgnąłem do rozwiązań autorów książki. Zainterесowała mnie uwaga mówiąca, że „prawdziwa jest ogólniejsza nierówność

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin kx > 0 \quad \text{dla } x \in (0, \pi) \text{ i } n = 1, 2, 3, \dots,$$

ale jej dowód jest dość skomplikowany”.

Zabrzmiało to trochę jak wyzwanie. Po jakimś czasie miałem również i jej uzasadnienie. Dowód, wbrew zapowiedziom, nie okazał się trudny, wykorzystałem indukcję i proste fakty z rachunku różniczkowego dostępne dla uczniów szkół średnich.

Aby zobaczyć, jak nierówność ta jest uzasadniana w literaturze, sięgnąłem po książkę D.S. Mitrinovicia „Elementarne nierówności”, PWN, Warszawa 1972. Znalazłem ją tam jako Problem 3.15 (str. 155). Ku mojemu zaskoczeniu proponowane tam uzasadnienie wymaga (zaawansowanej) umiejętności całkowania funkcji zespolonych po krzywych zamkniętych!

Zacząłem poszukiwać innych opublikowanych uzasadnień tej nierówności. Dowiedziałem się wtedy, iż w 1910 roku matematyk węgierski Lipót Fejér (1880–1959) badając szeregi trygonometryczne wykazał, że funkcja

$$S_n(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx, \quad x \in (0, \pi),$$

osiąga maksimum dla $x = \frac{\pi}{n+1}$, a ponadto spełnia warunki

$$S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) > S_{n-1}\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad n \geq 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \approx 1,85193.$$

(Wykazanie tych zależności może być pouczającym ćwiczeniem.)

Fejér wyraził również przypuszczenie, że

$$S_n(x) > 0 \quad \text{dla } x \in (0, \pi) \text{ i } n = 1, 2, 3, \dots$$

Powyższą hipotezę udowodnili niezależnie D. Jackson [1] w 1911 roku i T.H. Gronwall [2] w 1912 roku. W latach następnych pojawiały się dowody innych autorów, między innymi krótki dowód E. Landaua [3] z 1933 roku.

Metale z ciężkimi elektronami

Jan KARBOWSKI

Zapewne każdy ze szkoły pamięta, że masa elektronu jest około 2000 razy mniejsza od masy protonu. Każdy też wie, że prąd elektryczny w metalach jest strumieniem elektronów przewodnictwa oderwanych od macierzystych atomów (tzw. nośniki prądu elektrycznego). Zatem należałoby się spodziewać, że masa nośników prądu m oszacowana na podstawie wzoru

$$(1) \quad \frac{mv}{\tau} = eE$$

powinna być w przybliżeniu równa masie elektronu wziętej z tablic fizycznych.

W powyższym wzorze v jest prędkością dryfu elektronów, τ – średnim czasem między rozproszeniami elektronów, e – ładunkiem elektronu, E zaś przyłożonym polem elektrycznym.

Ewentualne drobne odstępstwa od wartości tablicowej można by próbować wytłumaczyć wpływem oddziaływania z siecią jonów (atomów, które utraciły elektrony). Powyższe rozumowanie zastosowane do metali alkalicznych rzeczywiście daje dobre oszacowanie.

Jednak pod koniec lat 70. i na początku 80. zaczęto syntetyzować nowe związki międzymetaliczne na bazie pierwiastków ceru i uranu, w których mierzone masy nośników prądu były niezwykle duże, rzędu 100 – 1000 mas elektronu. Krótko mówiąc, „elektrony przewodnictwa” w tych związkach są prawie tak ciężkie jak protony! Stąd też wzięła się nazwa „ciężkie fermiony” dla takich układów (słowo **fermiony** oznacza klasę cząstek o pewnych własnościach kwantowomechanicznych, do której należą, między innymi, elektrony, protony i neutrony; drugą klasę cząstek stanowią tzw. **bozony**, do której należy np. foton).

Spróbujmy zrozumieć, jaki jest mechanizm powstawania tak wielkich mas. Zanim zajmiemy się sytuacją w kryształach, poświęćmy parę zdań atomom. Wokół jądra izolowanego atomu (tzn. będącego daleko od pozostałych) elektrony poruszają się w pewien uporządkowany sposób, który jednak odbiega od klasycznych wyobrażeń. Nie wszystkie rodzaje ruchu są możliwe, lecz tylko pewne wyróżnione. Określony rodzaj ruchu jest związany ze stanem, w jakim znajduje się elektron. Stan taki nosi nazwę kwantowomechanicznego i może być opisywany tylko w kategoriach mechaniki kwantowej.

W kryształach atomy tworzą sieć krystaliczną, tzn. nie można już ich traktować jako izolowane. „Czują” one nawzajem swoją obecność. Efektem tej bliskości jest modyfikacja ruchów elektronowych (stanów kwantowych) dla elektronów z dala od jądra. Dla niektórych stanów może być ona znaczna, zmieniając całkowicie charakter ruchu, dla innych minimalna. W pierwszym przypadku elektrony mogą poruszać się pomiędzy atomami, tracąc więc z macierzystym atomem; następuje tzw. kolektywizacja elektronów, a stany takie nazywa się rozciągłymi. W drugim przypadku ruch elektronów pozostaje zasadniczo wewnątrzatomowy, bez możliwości przeskoku na inne atomy. Stany takie noszą nazwę zlokalizowanych.

W metalach alkalicznych, takich jak lit czy sód, stany elektronowe z powłok zewnętrznych atomów ulegają takim zmianom jak w pierwszym przypadku. Tworzą więc stany rozciągle i elektrony mogą poruszać się swobodnie wzdłuż całego kryształu.

Istnieją też związki, w których realizowany jest drugi przypadek, tj. gdy stany elektronowe nie ulegają zasadniczym zmianom. Mimo że powłoki zewnętrzne nie są zapełnione (tak jak dla atomów metali alkalicznych), elektrony nie mają możliwości ruchu kolektywnego i po przyłożeniu napięcia otrzymujemy $v = 0$. Zgodnie ze wzorem (1) prowadzi to do wniosku, że masa efektywna nośników jest nieskończona. Tak więc potencjalny metal staje się izolatorem. Ten typ izolatora (w odróżnieniu od tradycyjnego, w którym powłoki zewnętrzne są zapełnione) nosi nazwę izolatora Motta–Hubbarda. Przykładem jest tu związek V_2O_3 .

Najciekawsza sytuacja powstaje wtedy, gdy kryształ składa się jednocześnie z dwóch rodzajów atomów: rozciągających i lokalizujących stany elektronowe. Właśnie ten przypadek ma miejsce dla ciężkich fermionów. Rolę atomów lokalizujących ruch elektronów pełnią atomy ceru bądź uranu. Przykładowe związki z tej klasy materiałów to: UPt_3 , UBe_{13} , UPd_2Al_3 , $CeCu_2Si_2$ oraz $CeAl_3$. Aby w pełni zrozumieć ich własności, trzeba użyć formalizmu statystycznej teorii pola. My jednak postaramy się wytłumaczyć powstawanie dużych mas efektywnych przy użyciu znacznie skromniejszych środków. Ciężkie fermiony można rozpatrywać jako układ, w którym elektrony przebywają w dwóch stanach kwantowych: $|L\rangle$ (zlokalizowanym) i $|R\rangle$ (rozciągłym). Powyższe oznaczenie dla stanu

Twierdzenie 1 (nierówność Fejéra–Jacksona).

Jeżeli $x \in (0, \pi)$, to

$$S_n(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx > 0$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Dowód. Dla $n = 1$ i $x \in (0, \pi)$ nierówność $S_1(x) = \sin x > 0$ jest oczywista. Gdy $n = 2$,

$$S_2(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x = \sin x \cdot (1 + \cos x) > 0$$

dla $x \in (0, \pi)$. Załóżmy, że dla $x \in (0, \pi)$ i ustalonego $n - 1 \geq 1$ mamy $S_{n-1}(x) > 0$. Wykażemy, że wówczas dla $x \in (0, \pi)$ prawdziwa jest nierówność

$$S_n(x) = S_{n-1}(x) + \frac{1}{n} \sin nx > 0.$$

Rozważmy przypadki:

1. Gdy $x \in \{y \in (0, \pi) : \sin ny \geq 0\}$, to oczywiście

$$S_n(x) \geq S_{n-1}(x) > 0.$$

2. Gdy $x \in \{y \in (0, \pi) : \sin ny < 0\} = B_n$, to korzystając z tożsamości $2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \alpha - \sin \beta$, mamy następujący wzór na pochodną funkcji S_n :

$$\begin{aligned} S'_n(x) &= \sum_{k=1}^n \cos kx = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \cos nx \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\left(\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{1}{2}x \right) + \left(\sin \frac{5}{2}x - \sin \frac{3}{2}x \right) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sin \left(n + \frac{1}{2} \right)x - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right)x \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin \left(n + \frac{1}{2} \right)x - \sin \frac{x}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin nx \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cdot (\cos nx - 1) \right) < 0. \end{aligned}$$

Czytelnik, który nie pamięta tożsamości trygonometrycznych, lecz słyszał za to o funkcji wykładniczej w dziedzinie zespolonej, może zauważyć, że

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(e^{ikx}) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n e^{ikx}.$$

Dalej już jest łatwo – trzeba tylko umieć sumować ciąg geometryczny.

Zauważmy teraz, że zbiór B_n składa się ze skończonej liczby otwartych, rozłącznych przedziałów, np. $B_4 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$. Niech (a, b) będzie jednym z przedziałów tworzących zbiór B_n .

Funkcja S_n jest:

- 1) malejąca w (a, b) ,
- 2) ciągła w punktach a i b ,
- 3) $\sin nb = 0$.

Zatem

$$S_n(x) > S_n(b) = S_{n-1}(b) + \frac{1}{n} \sin nb = S_{n-1}(b) \geq 0$$

dla $x \in (a, b)$, a tym samym dla wszystkich $x \in B_n$. Wobec tego na podstawie zasady indukcji matematycznej nierówność $S_n(x) > 0$ jest prawdziwa dla $x \in (0, \pi)$ i wszystkich $n \in \mathbf{N}$. ■

W zupełnie analogiczny sposób można udowodnić „bliźniaczą” nierówność. Pojawia się ona, na przykład, jako zadanie 241 w „The Otto Dunkel Memorial Problem Book”, *American Mathematical Monthly* 64, no 7, part II, 1957 (istnieje przekład na język rosyjski: „Izbrannyje zadaczi iz żurnala American Mathematical Monthly”, Moskwa 1977). Zachęcam Czytelnika, by naśladowując dowód z poprzedniej strony, udowodnił samodzielnie

Twierdzenie 2. Jeżeli $x \in (0, \pi)$, to

$$C_n(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \dots + \frac{1}{n} \cos nx > -1$$

dla $n = 1, 2, \dots$

Uwaga 1. Jedynie dla $n = 1$ i $x = \pi$ ma miejsce równość

$C_1(\pi) = -1$; ponadto

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{0 \leq x \leq \pi} C_n(x) = -\ln 2 \approx -0,693147.$$

Uwaga 2. Czytelnik znający teorię szeregów Fouriera bez trudu

sprawdzi, że dla $x \in (0, \pi)$

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots = \frac{\pi - x}{2},$$

$$\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \dots = -\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right).$$

Literatura

[1] D. Jackson, „Über eine trigonometrische Summe”, *Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo* 32 (1911), 257–262.

[2] T.H. Gronwall, „Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx$ ”, *Math. Ann.* 72 (1912), 223–243.

[3] E. Landau, „Über eine trigonometrische Ungleichung”, *Math. Zeitschr.* 37 (1933), 36.

Najnowszy 3,5-metrowy teleskop w Apache Point Observatory w Nowym Meksyku ma być dostępny dla wielu astronomów z całego świata bez potrzeby jechania do obserwatorium. W pełni zautomatyzowany teleskop będzie można kontrolować za pomocą sieci komputerowej Internet. Również siecią będą przesyłane wyniki obserwacji.

Po wieloletnich badaniach około 20 tysięcy zdjęć Saturna zrobionych przez Voyagera 2 w 1981 roku M. Gordon i C. Murray z Londynu doszli do wniosku, że Saturn ma o 7 księżyców więcej niż sądzono. Saturn jest więc w tej dziedzinie niewątpliwym rekordzistą z dwudziestoma księżycami. Następna okazja do zbadania okolic Saturna nastąpi w 2004 roku, gdy zbliży się do niego sonda kosmiczna Cassini.

Poszukiwania w zakresie optycznym galaktyki silnie emitującej fale radiowe doprowadziły do odkrycia najbardziej odległej galaktyki. Astronomowie z Wielkiej Brytanii, Holandii i USA za pomocą teleskopu Herschela, znajdującego się na Wyspach Kanaryjskich, odkryli w gwiazdozbiornie Draco galaktykę oznaczoną w katalogu radioźródeł symbolem 8C 1435+635. Galaktyka ta znajduje się w odległości około 8 miliardów lat świetlnych od Ziemi i w momencie, gdy obserwowane przez nas światło opuszczało galaktykę, Wszechświat był 5 razy mniejszy niż obecnie.

kwantowego znane jest pod nazwą notacji Diraca. Okazuje się, że np. elektron w stanie $|L\rangle$ może przejść w stan $|R\rangle$ i na odwrót. Innymi słowy, elektron, którego ruch początkowo był ograniczony do najbliższego otoczenia atomu, nagle może zmienić charakter swojego ruchu i poruszać się w całym kryształ. Powyższy proces nosi nazwę mieszania stanów kwantowych. Zamiast mówić o dwóch rodzajach stanów, wygodnie nieraz jest mówić o dwóch rodzajach elektronów A i B (oczywiście, w rzeczywistości istnieje tylko jeden rodzaj elektronów).

Po przyłożeniu napięcia elektrycznego przez metal zaczyna płynąć prąd, którego wartość przypadająca na jeden elektron j jest dana przez proporcjonalność:

$$(2) \quad j \sim n_A v_A + n_B v_B,$$

gdzie v_A i v_B są prędkościami dryfu dla elektronów A i B , a n_A i n_B są ich odpowiednimi względnymi koncentracjami, przy czym $n_A + n_B = 1$.

Ostatnia równość oznacza, że elektron może znajdować się wyłącznie w stanie $|A\rangle$ lub $|B\rangle$. Załóżmy teraz, że elektron przebywa w stanie $|A\rangle$ część α swego czasu, a w stanie $|B\rangle$ część β . Jeśli tak, to powinna zachodzić równość $\alpha + \beta = 1$.

Zauważmy ponadto, że im dłużej elektrony przebywają w stanie $|A\rangle$, tym bardziej wydaje się, że jest ich więcej w tym stanie. Czyli mamy relacje

$$n_A \sim \alpha \quad \text{oraz} \quad n_B \sim \beta.$$

Wykorzystując teraz fakt, że wzór (1) jest słuszny dla obu rodzajów elektronów, tzn.

$$\frac{m_A v_A}{\tau_A} = eE = \frac{m_B v_B}{\tau_B}$$

i zakładając, że czas między rozproszczeniami jest taki sam ($\tau_A = \tau_B = \tau$), możemy napisać, że prąd

$$(3) \quad j \sim E\tau \left(\frac{\alpha}{m_A} + \frac{\beta}{m_B} \right).$$

Z drugiej strony, zamiast mówić o dwóch rodzajach nośników, równoważnie możemy mieć do czynienia z jednym, który łączy w sobie cechy obu jednocześnie.

Takie obiekty noszą nazwę kwazicząstek (efektywne nośniki) i przypisuje się im pewną masę efektywną m^* . Prąd elektryczny dla kwazicząstek opisuje ten sam wzór, co dla „prawdziwych” cząstek, tj.

$$(4) \quad j \sim E\tau^*/m^*.$$

Porównując wzory (3) i (4) oraz zakładając znowu, że $\tau^* = \tau$, dostajemy dla masy efektywnej następujące wyrażenie:

$$(5) \quad m^* = \frac{m_A m_B}{\alpha m_A + \beta m_B}.$$

W szczególnym przypadku, gdy jeden z wyjściowych stanów jest całkowicie zlokalizowany, np. $|B\rangle$, wtedy $m_B = \infty$ i wzór (5) upraszcza się do $m^* = m_A/\alpha$. Jaki wniosek wypływa z tego prostego wzoru? Otóż w przypadku, gdy elektrony znaczną część czasu przebywają w stanie zlokalizowanym, α jest małe i masa efektywna nośników może być znacznie zwiększona. Na przykład, dla układów ciężkich fermionów, elektrony 99% i więcej czasu spędzają w stanach zlokalizowanych, a tylko 1% lub mniej w stanach rozciągniętych. Wynika stąd, że $m^* \sim 100m_A - 1000m_A$.

Widać więc, że problem ogromnych mas efektywnych może być stosunkowo prosto wytłumaczony. Znacznie trudniej jest wyjaśnić inne własności ciężkich fermionów, takie jak ich niekonwencjonalne nadprzewodnictwo czy magnetyzm. Właśnie te dwie własności powodują, że układy te są intensywnie badane na świecie w ciągu ostatnich lat. Ale to temat na inne opowiadanie.

Teraz kładziemy gruszkę poziomo i powtarzamy eksperyment. Znowu kółko i krzyżyk zamieniły się miejscami. Ale teraz wygląda to tak, jakby lustro zamieniło swoją górę ze swoim dołem, a nie swoją stronę prawą ze swoją lewą. A więc pion fizyczny nie jest tu istotny, lecz położenie osi symetrii gruszki. Tytułowe pytanie „Dlaczego?” staje się bardziej intrygujące.

Odpowiedzi, moim zdaniem, należy szukać w psychofizjologii ludzkiego spostrzegania. Promienie świetlne padają na siatkówkę oka ludzkiego. Zostają odebrane przez ponad 100 milionów komórek receptorowych i przetworzone na impulsy przekazywane do tzw. kory wzrokowej mózgu, gdzie są przetwarzane i interpretowane. Analogicznie działa kamera video sprzężona z komputerem. Kamera przetwarza impulsy świetlne na impulsy elektryczne, wysyłane do komputera. Tam są poddawane obróbce graficznej i przekazywane na monitor. Mózg jednak nie tylko przetwarza otrzymywane obrazy, ale je też interpretuje, np. rozpoznając gruszkę. W szczególności subtelne różnice obrazu na siatkówce lewego i prawego oka są przetwarzane w mózgu na obraz trójwymiarowy z głębią.

Ta umiejętność interpretacji obrazu nie jest człowiekowi dana wraz z urodzeniem. Początkowo niemowlę odróżnia tylko światło od ciemności, dopiero po wielu tygodniach zaczyna uczyć się rozpoznawania kształtów. Interpretacja obrazu rozwija się wraz z rozwojem rozumienia kształtu i wzajemnego położenia widzianych obiektów, wyobraźni przestrzennej i kształtowaniem się pojęć geometrycznych. Rysunki dzieci szalenie frapują artystów; prawdopodobnie wyrażają one jakoś sposób, w jaki mózg dziecka interpretuje spostrzegane obrazy. Jego siatkówka odbiera obraz zapewne tak jak i nasza, ale jego mózg inaczej przetwarza otrzymywane bodźce.

Patrz np. [2], rozdziały o rozwoju spostrzeżeń kolejno w wieku niemowlęcym, poniemowlęcym, przedszkolnym, młodszym wieku szkolnym i w wieku dorastania.

Dlaczego lustro zamienia prawą stronę z lewą, a nie górę z dołem?

Zbigniew SEMADENI

Zagadnienie lustra omawiane było już w *Delcie* czterokrotnie (w numerach 6/1977, 6/1979, 10/1987 i 7/1993), sądzę jednak, że warto dorzucić jeszcze kilka uwag.

Przede wszystkim chciałbym podkreślić, że odpowiedzi na postawione pytanie nie można udzielić opierając się wyłącznie na wiedzy z matematyki i fizyki. Przeprowadźmy następujący eksperyment myślowy (a jeśli ktoś woli – eksperyment prawdziwy). Bierzymy gruszkę (lub bryłę obrotową bez żadnych innych symetrii), zaznaczamy na niej kółko i obok krzyżyk. Stawiamy ją pionowo przed lustrem. Na obrazie gruszki w lustrze kółko i krzyżyk zamieniają się miejscami. Efekt jest taki, jakby lustro zamieniło stronę prawą z lewą, ale nie zamieniło góry z dołem. Matematycznie sprawa jest o tyle jasna, że symetria względem płaszczyzny lustra musi zmieniać orientację na przeciwną. Ale dlaczego właśnie zamienia lewą z prawą? Zmianę orientacji można uzyskać zarówno przez zamianę lewej z prawą, jak i przez zamianę góry z dołem (ale nie przez obie te zamiany razem). Być może pion jest jakoś wyróżniony dla lustra. Pion – to kierunek linii sił pola grawitacyjnego. Czy grawitacja ma jakiś związek z odbiciem promieni świetlnych?

Gdy patrzymy z ukosa na kartkę papieru, widzimy ją w perspektywie. Aby zrozumieć, jaki obraz pada na siatkówkę oka, wyobraźmy sobie ostrosłup, którego podstawą jest obserwowany prostokąt, a wierzchołek znajduje się w środku oka. Obraz padający na siatkówkę otrzymamy – w przybliżeniu – biorąc przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną prostopadłą do prostej łączącej wierzchołek ostrosłupa ze środkiem podstawy. Łatwe rozumowanie geometryczne pokazuje, że obraz ten jest wprawdzie czworokątem, ale bynajmniej nie jest prostokątem, a mimo to w mózgu jest interpretowany jednoznacznie jako prostokąt, *bowiem wiemy lub podświadomie zakładamy, że kartka jest prostokątna*. Nawet matematycy bywają zaskoczeni efektem tego eksperymentu: patrzymy na taki skośnie położony prostokąt (o wyraźnym, ale nie przesadnym skosie), wydają się nam, że widzimy kąty proste, po czym przykładamy do oka ekierkę i przekonujemy się, że dwa z tych kątów widzimy jako ostre, a dwa – jako rozwarte. Podobnie, gdy patrzymy z ukosa na okrąg, do oka dociera kształt elipsy (przekrój odpowiedniego stożka, prostopadły do osi), ale mózg nasz interpretuje to jako okrąg.

Przyłożmy do oka linijkę: okaże się, że linie pionowe (takie jak krawędzie ścian budynku), które wydają się nam równoległe, w rzeczywistości docierają do naszej siatkówki jako nierównoległe. Niby to wiemy, uczyliśmy się o perspektywie, ale możemy być zaskoczeni tym, co widzimy. Nasz mózg automatycznie interpretuje takie linie jako równoległe (podobnie jak obecnie, przy tworzeniu map, komputer przekształca skośnie zdjęcia lotnicze na wyprostowane). Co więcej, matematycy nieraz kwestionują rysunki prostopadłościannu w perspektywie zbieżnej; wolą perspektywę równoległą. Innymi słowy, nieraz za naturalny uważają rysunek bryły nie taki, jak ją widzą, lecz taki, jak ją sobie wyobrażają.