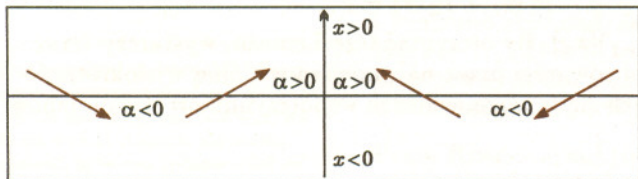


Problemy stabilności wybranych układów optycznych

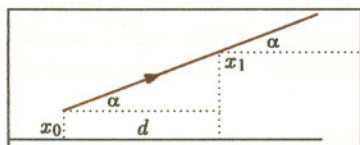
Michał REWIŃSKI

Jest to skrót pracy nagrodzonej w II Ogólnopolskim Konkursie Uczniowskich Prac Naukowych z Fizyki. Autor był wówczas uczniem I LO im. Mikołaja Kopernika w Gdańsku. Obecnie jest studentem Politechniki Gdańskiej.

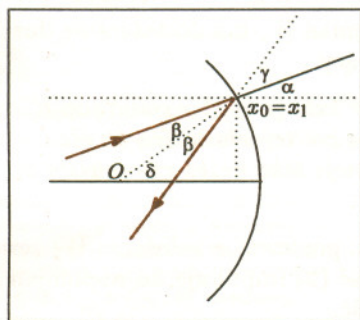
Przechodzenie promieni świetlnych przez układy optyczne złożone z soczewek i zwierciadeł mających wspólną oś optyczną można analizować za pomocą rachunku macierzowego.



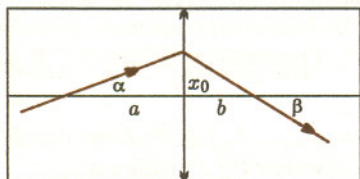
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

W analizie stabilności układów optycznych wygodnie jest skorzystać z podstawowych własności odwzorowań liniowych przestrzeni wektorowych. Niech F będzie macierzą odpowiadającą pewnemu przekształceniu liniowemu w przestrzeni \mathbb{R}^n . Zdefiniujemy wielomian charakterystyczny przekształcenia w następujący sposób

$$F(\lambda) = \det(F - \lambda I).$$

Jeśli wielomian charakterystyczny ma n różnych pierwiastków, to \mathbb{R}^n jest sumą prostą n jednowymiarowych podprzestrzeni niezmienniczych, generowanych przez wektory własne $(f_i)_{i=1}^n$ odpowiadające wartościom własnym $(\lambda_i)_{i=1}^n$, a macierz F przekształcenia jest w tej bazie diagonalna.

W danym punkcie przestrzeni promień będziemy charakteryzować posługując się dwiema zmiennymi: odlegością x od osi optycznej i kątem α , jaki promień tworzy z tą osią. Utwórzmy z tych dwóch wielkości wektor:

$$w = \begin{bmatrix} x \\ \operatorname{tg} \alpha \end{bmatrix}.$$

Konwencję znakową dotyczącą x oraz α przedstawia rysunek 1. Odbicie promienia, przejście przez cienką soczewkę, granicę ośrodków czy też ośrodek jednorodny można opisać za pomocą przekształcenia liniowego, reprezentowanego przez macierz.

Przykłady

Macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

odpowiada przejściu promienia przez jednorodny ośrodek między punktami, których rzuty na oś optyczną są odległe o d (rys. 2). Z kolei macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

może być, na przykład, macierzą odbicia od zwierciadła kulistego o promieniu R (rys. 3), wtedy $a = -2/R$ (przyjmujemy, że R jest dodatnie dla zwierciadła wklęsłego i ujemne dla wypukłego, natomiast dla płaskiego $R = \infty$), albo macierzą opisującą załamanie promienia przez cienką soczewkę skupiającą o ogniskowej f (rys. 4), wtedy $a = -1/f$.

Rozważmy układ nieskończonej liczby jednakowych soczewek ustawionych wzdłuż osi optycznej w jednakowych odległościach. Do układu wpuszczamy promień świetlny określony wektorem w . W jakich warunkach promień będzie mógł pozostać dowolnie długo we wnętrzu układu? Zakładamy, że promień jest przyosiowy, a soczewki traktujemy jak nieograniczone. Sformułujmy pytanie inaczej: Niech x_n oznacza odległość od osi optycznej po n -tym załamaniu, a $\operatorname{tg} \alpha_n$ tangens kąta jego nachylenia. W jakich warunkach ciągi $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ oraz $(\operatorname{tg} \alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ są ograniczone? Jeśli ciągi te są ograniczone niezależnie od tego, jaki promień wybraliśmy na początku, będziemy mówić, że układ jest stabilny. Do odpowiedzi na pytanie wystarczy podstawowa wiedza z algebry (patrz marginesy).

Rozważmy jeden cykl złożony z dwóch elementów: załamanie promienia przez soczewkę, a następnie przejście załamanego promienia przez przestrzeń dzielącą dwie kolejne soczewki. Cyklowi temu odpowiada macierz A równa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d}{f} & d \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}.$$

Wartości własne macierzy A są równe

$$\lambda_1 = \frac{2f - d - \sqrt{d(d - 4f)}}{2f} \quad \text{oraz} \quad \lambda_2 = \frac{2f - d + \sqrt{d(d - 4f)}}{2f}.$$

Są one różne, gdy $d \neq 4f$.



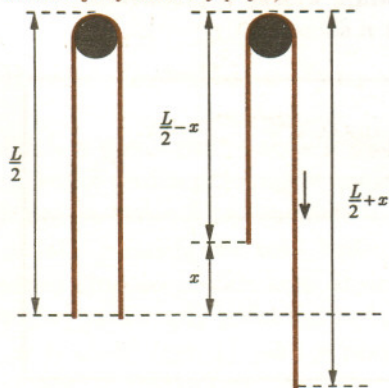
Rozwiązanie zadania F 423.

Równowaga liny jest nietrwała, najdrobniejsze zaburzenie (przesunięcie o x_0 lub nadanie jej prędkości v_0) spowoduje ucieczkę liny z pierwotnego położenia. Równania ruchu mają postać

$$\rho \left(\frac{L}{2} + x \right) \ddot{x} = \rho g \left(\frac{L}{2} + x \right) - T$$

$$\rho \left(\frac{L}{2} - x \right) \ddot{x} = T - \rho g \left(\frac{L}{2} - x \right),$$

gdzie T jest siłą napięcia liny (jednakową po obu stronach pręta, ponieważ zaniedbujemy rozmiary pręta).



Dostajemy z nich

$$\ddot{x} = \frac{2g}{L} x.$$

A zatem

$$x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t},$$

gdzie $\omega = \sqrt{2g/L}$. Niech w chwili początkowej lina będzie przesunięta z położenia równowagi o $x_0 \ll L$ i w spoczynku. Mamy wtedy

$$x = x_0 \cos \omega t.$$

Siła napięcia liny wynosi

$$T = \frac{1}{2} \rho g L - \frac{2\rho g x^2}{L}.$$

Niech Δp oznacza zmianę pędu kawałka liny przewijającego się przez pręt

$$2T - F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 2\rho \dot{x}^2,$$

gdzie F jest siłą reakcji pręta działającą na linę. Stąd

$$F = 2T - 2\rho \dot{x}^2.$$

Podstawiając T oraz

$$\dot{x}^2 = \omega^2(x_0^2 + x^2) \approx \omega^2 x^2 \text{ dostajemy}$$

$$F = \rho g L \left(1 - \frac{8x^2}{L^2} \right).$$

Lina odrywa się od pręta, gdy znika siła reakcji F , czyli dla $x = \frac{L}{2\sqrt{2}}$.

Uwaga. Gdy średnica pręta dąży do zera, przyspieszenie dośrodkowe fragmentu liny dąży do nieskończoności jak $1/R$, jednocześnie jego masa dąży do zera jak R , tak więc siła pozostaje skończona.

Czas obliczamy podstawiając otrzymaną wartość x do rozwiązania równań ruchu

$$t = \sqrt{\frac{L}{2g}} \operatorname{arccosh} \frac{L}{2\sqrt{2}x_0} =$$

$$= \sqrt{\frac{L}{2g}} \ln \left(\frac{L}{2\sqrt{2}x_0} + \sqrt{\frac{L^2}{8x_0^2} - 1} \right).$$

Na przykład, dla $L = 1$ m oraz $x_0 = 1$ cm mamy $t = 0,96$ s.

Niech V oznacza macierz przejścia od bazy wektorów własnych macierzy A do naszej wyjściowej bazy. Przejściu promienia przez n soczewek, czyli n cyklom, odpowiada macierz A^n , którą można zapisać jako

$$A^n = V \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} V^{-1}.$$

Stąd mamy

$$\begin{bmatrix} x_n \\ \operatorname{tg} \alpha_n \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} V^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ \operatorname{tg} \alpha_0 \end{bmatrix}.$$

Poza trywialnym przypadkiem promienia pokrywającego się z osią optyczną, czyli $x_0 = 0$ i $\operatorname{tg} \alpha_0 = 0$, ciągi $(x_n)_{n=0}^\infty$ oraz $(\operatorname{tg} \alpha_n)_{n=0}^\infty$ są ograniczone wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\lambda_1| \leq 1 \text{ oraz } |\lambda_2| \leq 1.$$

Sprawdźmy, kiedy pierwszy warunek jest spełniony. Możliwe są trzy przypadki:

a) $d > 4f$

Warunek $\lambda_1 \leq 1$ prowadzi do nierówności

$$\sqrt{d(d-4f)} \leq 4f - d < 0,$$

czyli do sprzeczności.

b) $d < 4f$

W tym przypadku wartości własne macierzy A są liczbami zespolonymi sprzężonymi o module 1, czyli warunek stabilności jest spełniony.

c) $d = 4f$

W tym przypadku macierz A ma postać

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4f \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}.$$

Obie wartości własne tej macierzy są równe minus jeden, a więc nie możemy posłużyć się jak poprzednio rozkładem na podprzestrzenie niezmiennicze.

Zauważmy jednak, że przekształcenie $(A - \lambda I)^2$ jest zerowe. Możemy zatem napisać następującą równość

$$\begin{aligned} A^n &= ((A - \lambda I) + \lambda I)^n = \binom{n}{1} (A - \lambda I) \lambda^{n-1} I^{n-1} + \binom{n}{0} \lambda^n I^n = \\ &= (-1)^{n-1} (n(A + I) - I). \end{aligned}$$

A zatem

$$A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ \operatorname{tg} \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^n ((-2n-1)x_0 + 4fn \operatorname{tg} \alpha_0) \\ (-1)^n ((-n/f)x_0 + (2n-1) \operatorname{tg} \alpha_0) \end{bmatrix}.$$

Widzimy więc, że ciągi $(x_n)_{n=0}^\infty$ oraz $(\operatorname{tg} \alpha_n)_{n=0}^\infty$ wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} x_n &= (-1)^n (n(4f \operatorname{tg} \alpha_0 - 2x_0) - x_0), \\ \operatorname{tg} \alpha_n &= (-1)^n \left(n \left(-\frac{x_0}{f} + 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \right) - \operatorname{tg} \alpha_0 \right). \end{aligned}$$

Powyższe ciągi są ograniczone wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{x_0}{\operatorname{tg} \alpha_0} = 2f.$$

A zatem układ soczewek jest stabilny optycznie tylko wtedy, gdy $d < 4f$.

W analogiczny sposób można badać także inne układy optyczne, na przykład złożone z dwóch ustawionych naprzeciw siebie zwierciadeł o wspólnej osi optycznej. W przypadku dwóch zwierciadeł wklęsłych, każde o promieniu krzywizny R , odległych wzajemnie o d , układ jest stabilny, gdy $d < 2R$.

W przypadku dwóch zwierciadeł, z których jedno jest wklęsłe, a drugie wypukłe, układ jest stabilny dla $d < R$.

Dużo ciekawszym zagadnieniem jest analiza stabilności układu soczewek, dla których ogniskowa zależy od odległości x , w jakiej promień pada na soczewkę.

W tym przypadku nie możemy, niestety, posłużyć się rachunkiem macierzy, gdyż załamanie promienia nie jest już liniowym przekształceniem wektora w . Przyjmijmy, że zależność ogniskowej soczewki od odległości x , w jakiej pada na nią promień, opisuje wzór

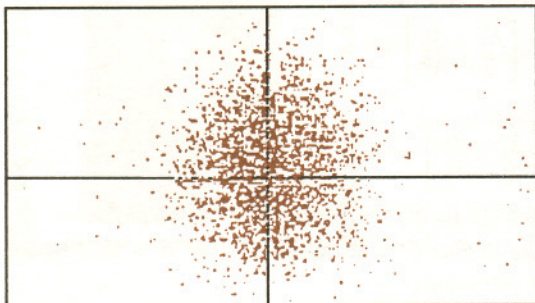
$$f(x) = f_0(1 + kx^2).$$

Transformację promienia podczas przejścia przez soczewkę opisują równania rekurencyjne

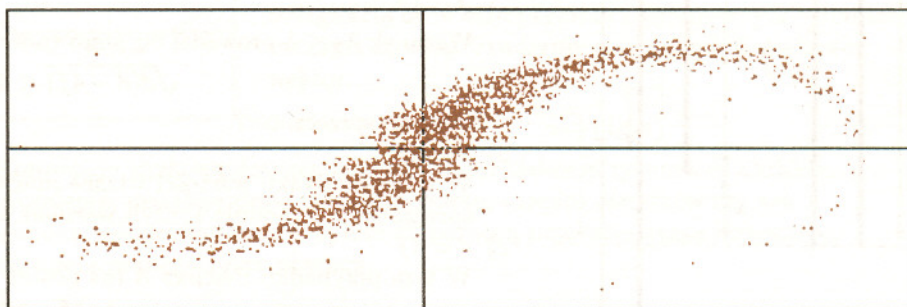
$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{d}{f_0 + kx_n^2}\right) + d \operatorname{tg} \alpha_n,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{-x_n}{f_0(1 + kx_n^2)} + \operatorname{tg} \alpha_n.$$

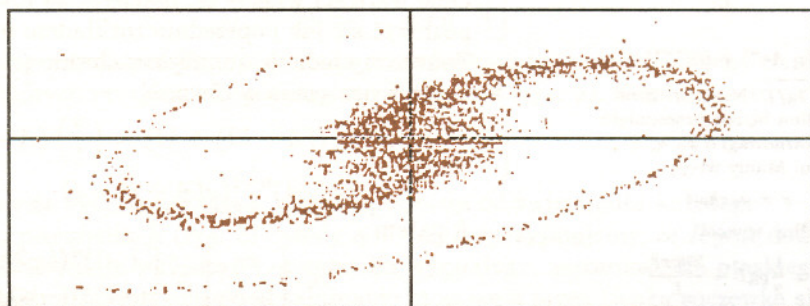
Dzięki symulacjom komputerowym można obliczyć i wykreślić położenie promieni po przejściu przez kolejne soczewki układu. W symulacjach, których wyniki są przedstawione na rysunkach 5–9, badany był nie pojedynczy promień, ale cała ich wiązka (rysunki przedstawiają wiązkę w przestrzeni fazowej $(x, \operatorname{tg} \alpha)$ po przejściu przez n soczewek).



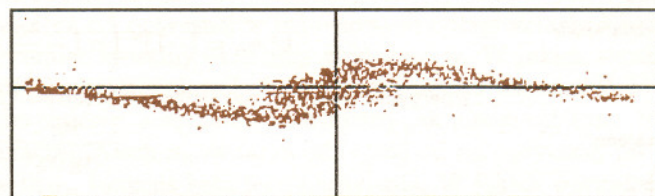
Rys. 5. Kształt wiązki w chwili początkowej ($n = 0$).



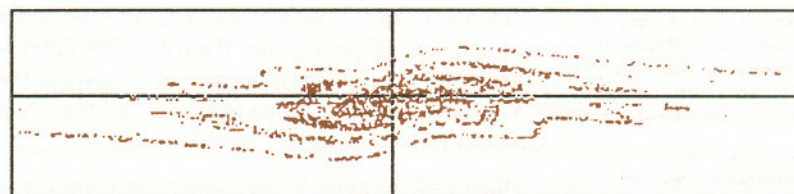
Rys. 6. Czynniki nieliniowe $k = 10^{-6}$, $n = 10$.



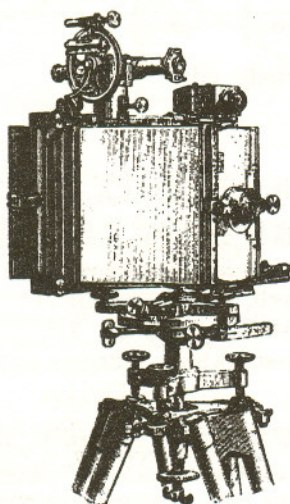
Rys. 7. Czynniki nieliniowe $k = 10^{-6}$, $n = 31$.



Rys. 8. Czynniki nieliniowe $k = 10^{-4}$, $n = 4$.



Rys. 9. Czynniki nieliniowe $k = 10^{-4}$, $n = 11$.



Zbiory początkowych odległości od osi optycznej oraz tangensów kątów podlegały rozkładowi gaussowskiemu. Wprowadzona nieliniowość okazała się źródłem niestabilności. Jako ciekawostkę warto odnotować, że uzyskane kształty bardzo przypominają kształty galaktyk.