epsilon

5/96

(62)

Zbieżność rozbieżnych

Ile wynosi suma $1-1+1-1+1-1+\ldots$? Wydaje się, że takie pytanie może zadać tylko ktoś, kto nie ma zielonego pojęcia o szeregach. Powszechnie przecież wiadomo, że jest to szereg rozbieżny i jego suma nie istnieje. Bardziej precyzyjnie, ciąg sum cząstkowych nie ma granicy, bowiem sumy te są na przemian równe 1 lub 0. My to wiemy, ale czy zawsze tak było?

Próby badania sum nieskończonych podejmowano już w starożytności, ma to swoje odbicie w paradoksach Zenona. Zainteresowanie szeregami wzrosło, gdy zaczął się rozwijać rachunek różniczkowy i całkowy. Na przełomie XVII i XVIII wieku oraz w wieku XVIII uzyskano wiele ciekawych i ważnych rezultatów. Matematycy tego okresu dobrze sobie radzili z szeregami, chociaż pojęcie to nie było precyzyjnie określone – polegano głównie na wyczuciu i intuicji. Wśród wielu problemów spore emocje wzbudziło nieskończone dodawanie na przemian jedynek i minus jedynek, czyli ile wynosi suma

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots$$

Jeśli szereg ten zapiszemy w postaci

$$S=1-(1-1+1-1+1-\ldots),$$

to mamy równość $S=1-S$, co daje $S=1/2$. Rozumowanie to obecnie jest nie do przyjęcia. W wieku XVII i XVIII taki sposób dowodzenia był jednak zupełnie naturalny. Poprawność „wyniku” potwierdzały inne fakty. Badany szereg można uznać za szereg geometryczny o ilorazie -1, a więc suma będzie równa $\frac{1}{1-(-1)}$, czyli znów $1/2$. Albo inaczej: znane jest rozwinięcie

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$$

Po wstawieniu za x jedynki mamy jeszcze jedno potwierdzenie badanej zależności. Tak, między innymi, rozumował Guido Grandi na przełomie XVII i XVIII stulecia. Wnioskował on również, ustawiając odpowiednio nawiasy, że suma $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$ musi być równa 0. Grandi nie widział w tym żadnej sprzeczności: „równość” $0=1/2$ miała uzasadniać fakt, iż świat powstał z niczego.

Tym problemem zajął się również Leibniz w 1713 roku. Wypisał on kolejne sumy cząstkowe otrzymując $1,0,1,0,1,\ldots$. Leibniz uznał, że ostateczna suma musi być średnią arytmetyczną cząstkowych rezultatów, czyli będzie to $1/2$. Rozumowanie Leibniza akceptowali: Jacob, Johann i Daniel Bernoulli, a nawet Lagrange.

Czytając te uzasadnienia pewnie uśmiechamy się z wyrozumiałością – nie było poprawnej definicji, stąd cały zamęt. Należy jednak pamiętać, że zbieżność szeregu to sprawa umowna; umówiliśmy się, że pewne szeregi będziemy nazywać zbieżnymi, inne zaś nie. Dlaczego tak, a nie inaczej? Bo takie podejście wydaje się najlepiej odpowiadać naszej intuicji. Ale czy zawsze? Jeśli przyjmiemy inne kryterium, to będziemy mieć inne warunki zbieżności, czasem zupełnie odległe od wyobrażeń. Lecz takie „dziwne” podejście może mieć bardzo ważne zastosowania praktyczne; intuicja lub przyzwyczajenia nieraz już zwodziły i dopiero praktyka musiała to weryfikować.

Moglibyśmy, na przykład, sumować szeregi według następującej zasady.

Dla danego szeregu liczbowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ tworzymy szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Jeśli szereg ten jest zbieżny dla $0<x<1$, a jego suma $f(x)$ ma dla $x\to 1^-$ granicę g, tj. $\lim_{x\to 1^-} f(x)=g$, to liczbę g nazywamy uogólnioną sumą szeregu wyjściowego. Przy takiej definicji szereg $1-1+1-1+1-\ldots$ ma sumę uogólnioną $1/2$. Tak więc intuicja idąca w tym kierunku daje się uzasadnić formalnie.

Opisana metoda, nazywana czasem metodą szeregów potęgowych, jest jedną z wielu metod rozszerzenia pojęcia zbieżności szeregów. Ciekawe, że w każdej z nich przemienny szereg jedynkowy ma zawsze sumę $1/2$.

Musimy więc być bardzo ostrożni, gdy zechcemy krytykować pomysły i intuicję naszych poprzedników...

Zdzisław POGODA

WIZUALIZACJA MATEMATYKI

Prosta przechodzi przez ognisko

Koło Matematyków Studentów UJ organizuje konkurs na cytat miesiąca i cytat roku. Odbywa się to w ten sposób, że oryginalniejsze stwierdzenia, wypowiedziane przez wykładowców i prowadzących ćwiczenia, są zapisywane przez studentów na specjalnej, ogólnodostępnej kartce. Po zakończeniu miesiąca studenci (stawiając krzyżyki przy odpowiednim cytacie) wybierają CYTAT MIESIĄCA. Po zakończeniu roku akademickiego w analogiczny sposób wybiera się CYTAT ROKU.

Miło nam zakomunikować, że cytatem roku 1994/95 zostało wybrane zdanie wypowiedziane przez członka redakcji *EPSILONA*! Główną nagrodę otrzymał Marcin Poźniak, który, wręczając studentowi poprawioną pracę pisemną, powiedział:

– *To nie jest znak zapytania, to jest... obawiam się... ocena.*

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.