

Sport z matematycznego i mechanicznego punktu widzenia

Henryk ŻOŁĄDEK

Są dwa zasadnicze powody uprawiania sportu:

– być lepszym od innych, osiągnąć sukcesy (pieniądze i sławę) lub

– utrzymać w przyzwoitym stanie kondycję fizyczną i psychiczną.

(Można spierać się o to, które z tych podejść jest lepsze i ważniejsze. Wydaje się, że nieliczni zajmujący się sportem w Polsce kierują się głównie pierwszym motywem.)

Jednakże każdy uprawiający sport chce być w pewien sposób efektywny, np. osiągnąć dobry czas w biegu, daleko skoczyć itd.

Niewątpliwym i często dominującym czynnikiem w sporcie jest siła mięśni zawodnika. Ale jeszcze częściej okazuje się, że sama siła fizyczna nie wystarcza do uzyskiwania dobrych wyników. Bardzo ważna jest technika wykonywanych ćwiczeń. Wszyscy trenerzy znają ten truizm i usilnie wpajają odpowiednie nawyki swoim podopiecznym. Wiedzą oni również, że techniką rządzą żelazne prawa mechaniki i biochemii.

W niniejszym artykule zamierzamy na przykładzie kilku dyscyplin pokazać, w jaki sposób znajomość praw mechaniki i elementarnej matematyki może przydać się sportowcom.

Jednokładności w lekkiej atletyce

Przytoczę trzy „twierdzenia” pochodzące z książki J. Smitha „Matematyka w biologii”.

(a) *Prędkość rozwijana przez zawodników w płaskim terenie praktycznie nie zależy od ich rozmiarów.*

Dla dowodu oznaczmy przez L parametr mierzący wielkość zawodnika, np. jego wysokość. Wtedy powierzchnia ciała zawodnika jest proporcjonalna do L^2 , a jego masa jest rzędu L^3 .

Moc wydatkowana przez zawodnika na czysty bieg jest proporcjonalna do L^2 . Wynika to z faktu, że około 25% energii chemicznej wytwarzanej przez organizm jest wykorzystywane na pracę mechaniczną mięśni, a pozostałe 75% przechodzi w ciepło. Ponieważ ilość utraconego ciepła jest proporcjonalna do L^2 (powierzchnia ciała), więc użyteczna energia jest proporcjonalna do L^2 .

Siła oporu powietrza jest proporcjonalna do kwadratu prędkości v^2 i do powierzchni poprzecznego oporu ($\sim L^2$). Moc tracona na jego pokonanie jest rzędu $v^2 L^2 \cdot v$ (siła \times prędkość).

Mamy zatem $v^3 L^2 \sim L^2$, co oznacza, że

$$v \sim L^0.$$

Oczywiście, rozmiary zawodników nie różnią się aż tak znacznie, aby można było potwierdzić to prawo doświadczalnie. Jeśli jednak popatrzymy na świat zwierząt, to stwierdzamy, że zając i koń rozwijają podobne prędkości.

(b) *Prędkość rozwijana przez zawodników biegnących pod górę jest odwrotnie proporcjonalna do ich rozmiarów.*

Tym razem zawodnik ma do pokonania siłę ciężenia, która jest proporcjonalna do $mg \sim L^3$, (m – masa, g – przyspieszenie ziemskie). Potrzebna na to moc jest proporcjonalna do $L^3 v$. Porównując ją z użyteczną mocą zawodnika dostajemy $L^3 v \sim L^2$, czyli

$$v \sim L^{-1}.$$

I rzeczywiście, pies wbiega na górę szybko, podczas gdy koń musi zwolnić.

(c) *Wysokość skoków zwierzęcia nie zależy od jego rozmiarów. (Z dosyć oczywistych względów nie chcę stosować tego „twierdzenia” do zawodników).*

Energia potrzebna do skoku na wysokość h jest proporcjonalna do $mgh \sim L^3 h$. Powinniśmy ją porównać do $F \cdot L$, gdzie F jest siłą rozwijaną przez mięśnie podczas odbicia. (Tutaj h nie występuje, ponieważ podczas lotu mięśnie nie wykonują pracy). Siła F jest ograniczona przez wytrzymałość kości proporcjonalną do ich przekroju poprzecznego, czyli $F \sim L^2$. Zatem $L^3 h \sim L^3$ lub

$$h \sim L^0.$$

I rzeczywiście, gryzoń stepowy – skoczek i kangur skaczą mniej więcej tak samo wysoko.





Taktyka biegu po rekord

Rozwiązanie zadania M782. Tym razem szeryf osiągnął swój cel. Załóżmy, że udało się znaleźć legalną lokalizację dla 100 saloonów. Zakreślmy wokół każdego z nich koło o promieniu 125 m. Wszystkie te koła muszą być parami rozłączne (w przeciwnym razie ich środki znajdowałyby się w odległości nie większej niż 250 m), zatem łącznie pokrywają powierzchnię $100 \cdot \pi \cdot (125 \text{ m})^2 = \frac{100}{64} \pi \text{ km}^2$. Jednak każde z tych kół musi zawierać się w kole o środku w miejskim więzieniu i promieniu 1125 m (ponieważ środki tych kół należą do koła o promieniu 1000 m i środka w więzieniu), więc suma ich pól nie może przekraczać $\pi \cdot (1125 \text{ m})^2 = \frac{81}{64} \pi \text{ km}^2$, co stoi w sprzeczności z poprzednim wynikiem.

Uwaga. W niniejszych rachunkach więzienie traktowano jako punkt materialny. Czytelnik zechce zastanowić się, w jaki sposób rozbudowa systemu penitencjarnego umożliwi zwiększenie podaży mleka.

Zadanie jest następujące.

W jaki sposób biegacz powinien biec, aby dystans L przemierzyć w jak najkrótszym czasie? Jego jedynymi ograniczeniami są: zapas energii A i maksymalna osiągalna prędkość v_m .

Inaczej mówiąc

$$v(t) \leq v_m, \quad \int_0^T v(t) dt = L, \quad \int_0^T E(v(t)) dt \leq A$$

i poszukujemy takiej optymalnej funkcji prędkości $v(t)$, aby czas T był minimalny. Tutaj $E(v)$ jest funkcją strat energii na jednostkę czasu. Zgodnie z badaniami przeprowadzonymi przez biochemików, można przyjąć, że

$$E(v) = b_0 + b_1 v + b_2 v^2 + b_3 v^3,$$

gdzie b_0 jest sumą strat energii na funkcjonowanie organizmu w spoczynku, b_1 charakteryzuje liniową reakcję organizmu na obciążenie, b_2 pojawia się przy dużych obciążeniach, a b_3 – przy maksymalnych prędkościach.

Przeformułujemy nieco nasz problem. Za niezależną zmienną przyjmijmy drogę x pokonaną w czasie t . Załóżmy także, że taktyka przebiegnięcia całego dystansu z maksymalną prędkością v_m jest nierealizowalna i możemy przyjąć, że cała energia A jest zużyta podczas biegu. Wtedy $dt = \frac{1}{v} dx$ i

$$T = \int_0^L \frac{dx}{v(x)}, \quad \int_0^L \frac{E(v)}{v} dx = A.$$

Poszukujemy takiej funkcji $v(x)$, aby przy A ustalonym T było minimalne. Jest to typowe zadanie z rachunku wariacyjnego. Twierdzę, że *takie $v(x)$ musi być stałe.*

Aby to wykazać, zastąpimy całki sumami Riemanna:

$$\sum_1^N f(v_i), \quad \sum_1^N g(v_i) = B,$$

gdzie $f = 1/v$, $g = E(v)/v$, $B = \text{const} \sim NA$. Pytamy o v_1, \dots, v_N realizujące minimum pierwszej sumy. Z drugiego wiążącego warunku wyznaczamy

$$v_N = g^{-1}\left(B - \sum_1^{N-1} g(v_i)\right) \text{ (jeśli funkcja } g \text{ nie jest odwracalna, to jako } g^{-1}$$

wyberamy jedną z gałęzi jej przeciwobrazu) i zadanie sprowadza się do szukania punktów minimum funkcji

$$h(v_1, \dots, v_{N-1}) = \sum_1^{N-1} f(v_i) + f \circ g^{-1}\left(B - \sum_1^{N-1} g(v_i)\right).$$

Widać, że funkcja jest symetryczna względem v_i . Ograniczając ją do zmiennej v_i , przy ustalonych pozostałych v_j , stwierdzamy, że ta nowa funkcja też osiąga minimum. Obliczając jej pochodną przekonujemy się, że minimum jest osiągane przy $v_1 = v_2 = \dots = v_{N-1} = v_*$. Oczywiście, także $v_N = v_*$. (Pozostawiamy Czytelnikowi samodzielne uzupełnienie tego dowodu.)

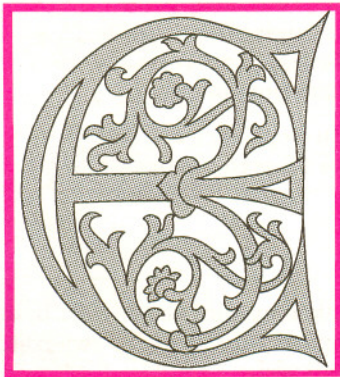
Teraz dokończenie zadania jest proste. Mamy $T = L/v_*$,

$$b_0/v_* + b_1 + b_2 v_* + b_3 v_*^2 \leq A/L$$

i poszukujemy maksymalnego $v_* \leq v_m$ spełniającego powyższą nierówność. Rozwiązanie jest następujące.

Najlepszą taktyką jest albo przebiec cały dystans z maksymalną prędkością, albo ze stałą optymalną prędkością.

Pierwszy przypadek dotyczy sprintów, a drugi średnich i długich dystansów (np. sposób biegania Bronisława Malinowskiego).



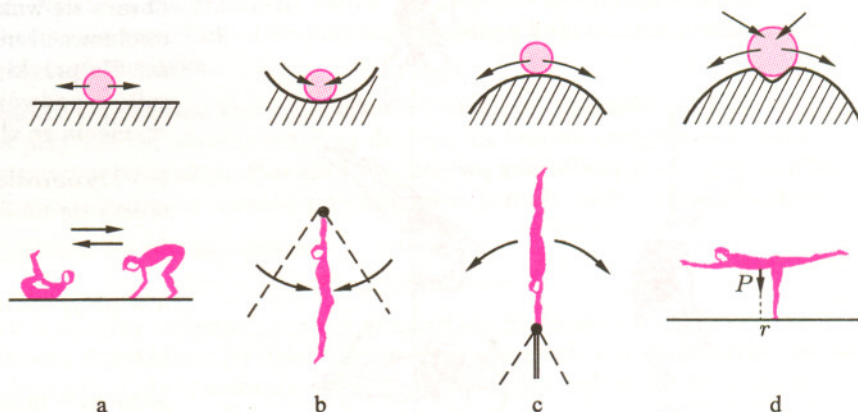
Przykład ten (z moimi modyfikacjami) zaczerpnąłem z książki Sadowskich (L.E. Sadowski, A.L. Sadowski) „Matematyka i sport” (po rosyjsku). Zainteresowani mogą w niej znaleźć ciekawe zastosowania metod probabilistycznych w sędziowaniu zawodów sportowych i w prognozowaniu wyników. Jest tam również takie intrygujące zdanie:

„Istnieje pogląd, że idee Czebyszewa, dotyczące rozcinania tkanin, były wykorzystane przy konstruowaniu sukiennego obszycia piłki tenisowej.”

Mechanika ćwiczeń gimnastycznych

Gimnastyka sportowa, jak żadna inna dyscyplina sportowa, jest bardzo techniczna i wykorzystuje do maksimum prawa mechaniki. (Na Zachodzie gimnastyka sportowa nazywa się *artistic gymnastics*, a nasza gimnastyka artystyczna nosi miano *rhythmic gymnastics*). Spróbujemy krótko opisać niektóre elementy i czynniki wpływające na jakość wykonywanych ćwiczeń gimnastycznych.

(a) **Stabilność.** Na rysunku 1 są przedstawione cztery typy położeń równowagi układów mechanicznych: nieokreślone (a), stabilne (b), niestabilne (c) i względnie stabilne (d).

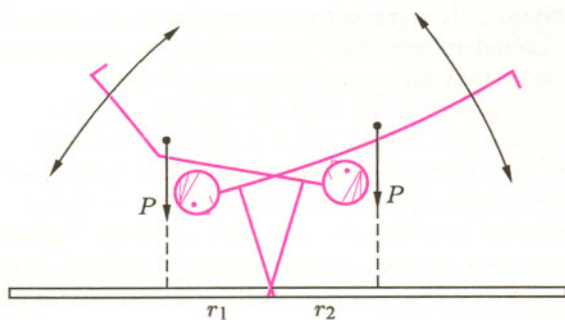


Rys. 1

Najważniejsze w gimnastyce są względnie stabilne położenia równowagi. Do nich zaliczają się ćwiczenia na równoważni, stójki na rękach (na podłodze, na poręczach, na kółkach) itp. Istotnym parametrem takiego położenia równowagi jest moment stabilności

$$P \cdot r,$$

gdzie P jest ciężarem, r zaś odległością rzutu środka ciężkości gimnastyka (na płaszczyznę poziomą) od brzegu obszaru oparcia (patrz rys. 1d).



Rys. 2

Bardzo często gimnastyk musi zachowywać równowagę podczas wykonywania ćwiczeń. Ma to miejsce podczas przechodzenia w stójkę (tzw. spiczaga), przy wymachach na niskich poręczach (rys. 2), przy wykonywaniu kół na koniu z łękami i przy lądowaniach przy zeskokach. Zwykle zachowanie względnego położenia równowagi jest procesem sterowanym. Każdemu odchyleniu ciała od równowagi powinien odpowiadać kontrujący wysiłek gimnastyka. Rzut środka ciężkości zmienia się i przechodzi (nieraz wielokrotnie) przez punkt oparcia.

(b) **Kinematyka.** Gimnastyk może być traktowany jako ciało sztywne (z dużym przybliżeniem) albo lepiej jako układ złożony z kilku sztywnych elementów połączonych gibkimi złączami (stawami). Ruch gimnastyka można rozłożyć na ruch jego środka ciężkości, ruch obrotowy całego układu wokół środka ciężkości i względne ruchy członków ciała gimnastyka.

Ruch środka ciężkości jest dobrze znany. Przy skokach i zeskokach porusza się on po paraboli, której parametry są określone przez długość wektora prędkości początkowej i przez początkowy kierunek lotu. Żadne, najbardziej nawet aktywne, sztuczki podczas lotu nie mogą zmienić tego toru. Istotny jest fakt, że do 80% czasu całego zeskoku (z drążka, kółek, poręczy) zabiera ruch powyżej przyrzędu. Zmiana wysokości przyrzędu nie ma istotnego wpływu na czas zeskoku.

Ruch obrotowy ciała wokół środka masy jest bardziej złożony. Jako ciało sztywne gimnastyk ma trzy własne osie obrotu (są to trzy kierunki własne tzw. tensora bezwładności). Wokół poprzecznej osi (a) (patrz rys. 3) są wykonywane salta w przód i w tył, przerzuty i fiolaki. Wokół osi podłużnej (b) wykonuje się obroty, najczęściej stosowane w łyżwiarstwie figurowym. Obroty wokół przednio-tylnej osi (c) są rzadziej wykonywane (przy saltach bokiem, gwieździe i wymachach na koniu z łękami).

Często obroty mają złożony charakter. Zawodnik obraca się wokół chwilowej osi obrotu, która może ewoluować i nie musi pokrywać się z żadną z własnych osi. Na przykład, gdy zawodnik wykonuje na drążku salto z podwójnym obrotem (rys. 3d), mamy do czynienia ze złożeniem obrotów wokół trzech osi naraz.

(c) **Dynamika.** Dynamika ćwiczeń gimnastycznych opiera się na dwóch prawach Newtona. Drugie mówi, że

$$m \cdot a = F,$$

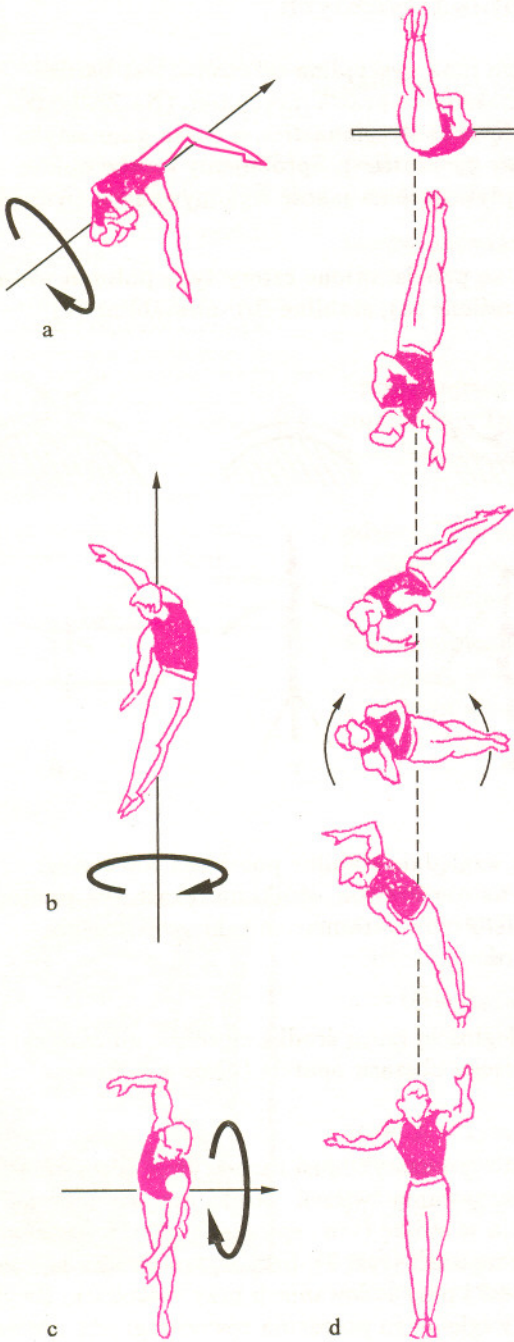
a w przypadku ruchu obrotowego przyjmuje postać

$$(1) \quad \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{M}}{dt}, \quad \mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega},$$

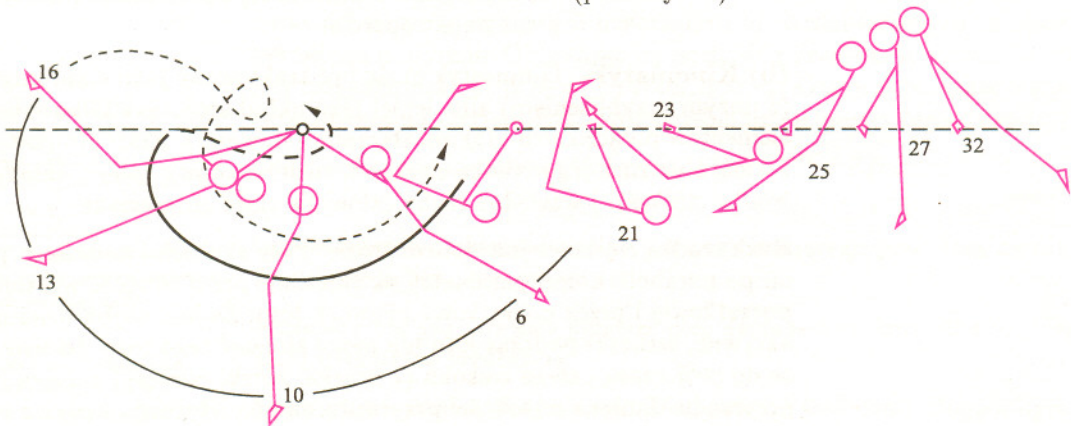
gdzie m – masa, \mathbf{a} – wektor przyspieszenia, \mathbf{F} – siła, \mathbf{r} – wektor położenia punktu przyłożenia siły, \mathbf{M} – moment pędu, I – moment bezwładności względem tej osi, $\boldsymbol{\omega}$ – wektor prędkości kątowej. Trzecie prawo dynamiki mówi, że każde działanie siłą \mathbf{F} jednego ciała na drugie wywołuje reakcję (równą $-\mathbf{F}$) drugiego ciała na pierwsze.

W gimnastyce występują następujące siły: siła ciężkości, siły odśrodkowe i dośrodkowe, siły Coriolisa, siły oporu i siły tarcia.

Działanie siły ciężkości w przypadku braku kontaktu z przyrządem wywołuje ruch opisany w poprzednim punkcie. Gdy gimnastyk utrzymuje kontakt z przyrządem, to siła ciężkości wpływa na ruch obrotowy gimnastyka wokół punktu zaczepienia. Przy tym zmieniając układ swego ciała sportowiec może zmieniać parametry w równaniu (1), tzn. \mathbf{r} i I , i wpływać tym samym na zmiany prędkości kątowej obrotu $\boldsymbol{\omega}$. Jako przykład ćwiczenia, w którym te efekty są wykorzystywane, może służyć wychwyt na drążku (patrz rys. 4).



Rys. 3



Rys. 4

Początkowo zawodnik wykonuje zamach w przód i w maksymalnym położeniu (pozycja 16) siła ciężkości ma duży moment. Następnie gimnastyk przybliża wyprostowane nogi do drążka i wykonuje kopnięcie w przód, nie odrywając jednak nóg od drążka. W ten sposób ciało przybliża się do przyrządu (I maleje) i zwiększa się szybkość powrotnego obrotu. Szybszy ruch nogami umożliwi „wejście” na drążek.

Siła dośrodkowa działa na zawodnika wykonującego obrót i jest odpowiedzialna za zmianę wektora prędkości v w kierunku osi obrotu. Wyraża się wzorem

$$F_d = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r.$$

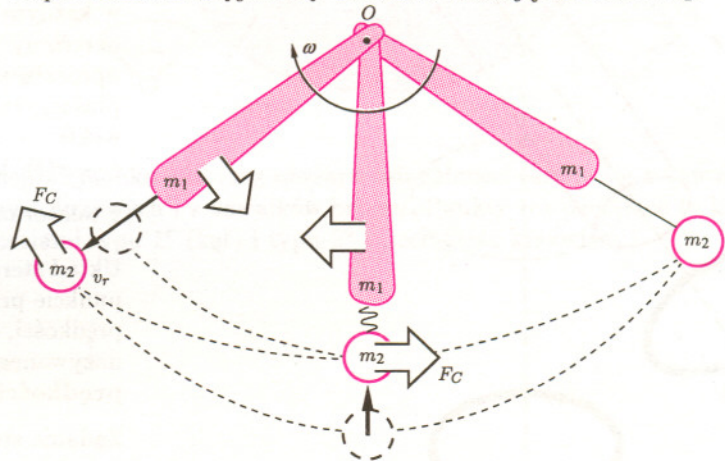
Siła odśrodkowa jest siłą reakcji zawodnika na przyrząd i zgodnie z trzecim prawem Newtona ma przeciwny zwrot. Te dwie siły powodują znaczne przeciążenia na zawodniku i na przyrządzie. Mogą kilkakrotnie przekroczyć ciężar ciała gimnastyka.

Na rysunku 5 pokazano krzywą wielkości tych sił w zależności od kąta obrotu przy dużym obrocie w tył na drążku. Ta krzywa przypomina znaną w matematyce lemniskatę Pascala i jest krzywą zakreślaną przez gryf drążka. Duża pętla odpowiada ruchowi pod drążkiem, a mała ruchowi nad drążkiem.

Siła Coriolisa wyraża się wzorem

$$\mathbf{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

i pojawia się przy zmianach pozycji gimnastyka podczas ruchu obrotowego. Na rysunku 6 pokazano jej działanie: m_1 jest masą tułowia gimnastyka, m_2 jest masą jego nóg. Gdy sportowiec zgina nogi w dolnym położeniu, to masa m_2 porusza się w górę z prędkością v_r i wywołana tym ruchem siła Coriolisa F_C odchyła nogi do tyłu. Przy rozginaniu nóg siła Coriolisa działa w przeciwnym kierunku. Odpowiednie inercyjne siły Coriolisa działają na tułów m_1 .

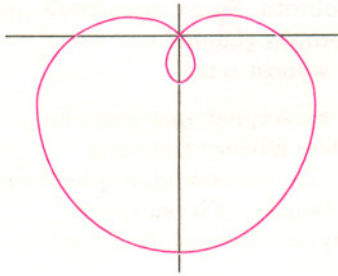


Rys. 6

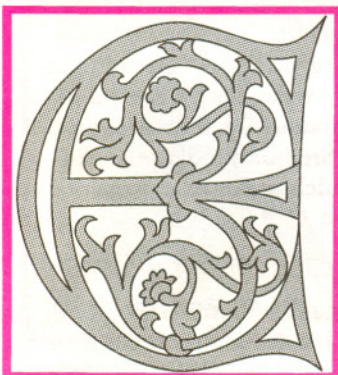
Działanie sił oporu i tarcia ma znaczenie przy wyskokach. Przy tym, jeśli wykonujemy salto, to istotny jest moment sił działających względem środka ciężkości. Uzyskujemy w ten sposób pewien moment pędu $I\omega$. Potem, korzystając z prawa zachowania momentu pędu i zmieniając I (poprzez zgrupowanie się), zwiększamy częstość obrotu ω i następnie rozprostowujemy się spadając na nogi po wykonanym obrocie w przód.

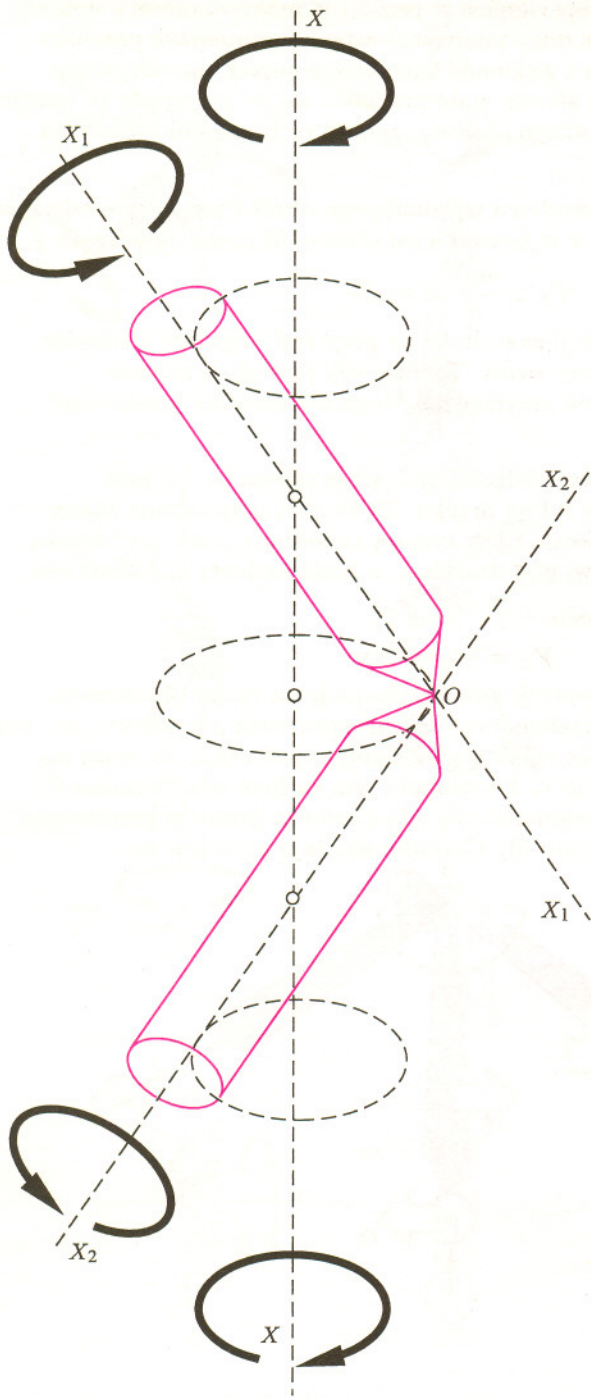
Na zakończenie pragnę przedstawić mechanizm wykonywania obrotów wokół osi podłużnej w locie, tzn. bez uprzedniego nadania momentu pędu poprzez działanie siły oporu. Gimnastyk nie jest w stanie sam stworzyć momentu pędu z niczego i wydaje się, że taki obrót nie jest możliwy. A jednak gimnastycy, akrobaci i skoczkowie do wody takie obroty wykonują.

Najprostszy przykład takiego ruchu przedstawia obrót w zwisie na jednym kółku. Gimnastyk zaczyna wykonywać ruchy typu „hula-hop”. Przy tym stopy, miednica i ramiona zaczynają opisywać nieduże okręgi. Natychmiast pojawia się wymuszony obrót całego układu w kierunku przeciwnym do „hula-hop”.



Rys. 5





Ten ostatni jest żądanym obrotem. Charakterystyczne jest to, że zaprzestanie ruchów „hula-hop” prowadzi do natychmiastowego zatrzymania obrotu. Podobne ruchy wykonuje kot, gdy wolno puszczone w powietrzu obraca się i spada na cztery łapy.

Schemat tego mechanizmu jest pokazany na rysunku 7, gdzie ciało jest traktowane jako dwuczłonowy cylindryczny model. Gdy cylindry zaczynają się obracać, opisując stożki wokół osi X , to natychmiast pojawia się przeciwnie skierowany obrót cylindrów wokół osi X_1 i X_2 . W sumie te dwie osie przedstawiają wygiętą podłużną „oś” obrotu. Suma momentów pędu opisanych wyżej dwu obrotów („hula-hop” wokół osi X i wokół $X_1 \cup X_2$) wynosi zero.

Materiały o gimnastyce zaczerpnąłem z rosyjskiego podręcznika dla instytutów kultury fizycznej „Sportowa gimnastyka”. Zainteresowanym podobnymi zagadnieniami polecam książkę „Fizyka sportu” autorstwa rodzimego fizyka – Krzysztofa Ernsta.

Halsowanie w żeglarskim jako sposób sterowania

Zwykły układ ewolucyjny jest określony przez układ równań różniczkowych (pole wektorowe): w każdym punkcie przestrzeni położenia układu jest określony wektor prędkości zmian tego układu. Dla uproszczenia przyjmijmy, że przestrzenią położenia jest płaszczyzna \mathbf{R}^2 . W każdym punkcie $x \in \mathbf{R}^2$ mamy wektor $v(x) \in \mathbf{R}^2$. Trajektoriami układu są krzywe $t \rightarrow x(t)$, których wektory styczne pokrywają się z wektorami pola, $\frac{dx}{dt} = v(x(t))$.

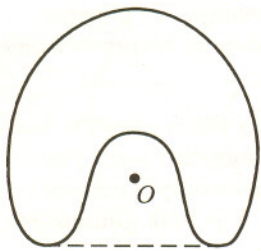
Układ sterowania określa się przez zadanie w każdym punkcie przestrzeni położenia nie jednego wektora prędkości, lecz całego zbioru tych wektorów nazywanego **trajektorią dopuszczalnych prędkości**.

Zadanie sterowania polega na tym, aby wybierając w każdym momencie wektor prędkości z danego zbioru dopuszczalnych prędkości, osiągnąć określony cel (np. dojść w jak najkrótszym czasie do zadanego celu – podzbioru \mathbf{R}^2).

Łatwo zauważyć, że zadanie sterowania jachtem należy do tej klasy problemów. Gdy wieje silny wiatr o ustalonym kierunku, to zbiór dopuszczalnych prędkości ma kształt pokazany na rysunku 8 (i nie zależy od punktu x). Sterowanie w kierunku zgodnym z kierunkiem wiatru nie przedstawia żadnych trudności. Natomiast ruch w kierunku przeciwnym jest możliwy tylko przy stosowaniu halsowania. Strategia polega na systematycznych zmianach ruchu z różnymi prędkościami należącymi do dopuszczalnego zbioru. Średnia prędkość ruchu przy takiej mieszanej strategii należy do zbioru średnich arytmetycznych wykorzystywanych wektorów. Stąd mamy wniosek, że

zawsze zbiór dopuszczalnych prędkości można zastąpić jego otoczką wypukłą.

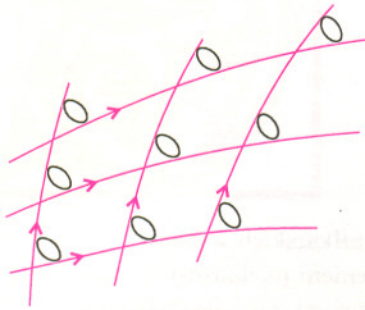
Ruch we wszystkich kierunkach jest możliwy, gdy 0 należy do otoczki wypukłej (jak na rys. 8). Oczywiście, jeśli wiatr jest bardzo silny, to ani zbiór dopuszczalnych prędkości, ani jego otoczka wypukła nie zawierają 0 i niektóre kierunki ruchu są zabronione (patrz rys. 9).



Rys. 7

Rys. 8

Odsyłamy Czytelnika do popularnej książki V.I. Arnolda „Teoria katastrof” (po rosyjsku i angielsku).



Rys. 9

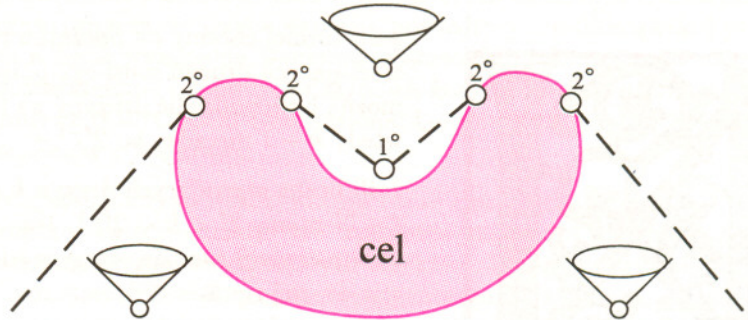
W ogólnym przypadku cel może być osiągnięty (po pewnym czasie) tylko dla pewnego podzbioru punktów startowych, który nie musi pokrywać się z płaszczyzną \mathbf{R}^2 . Nazywamy go **obszarem osiągalności**.

Interesującym matematycznym problemem jest zbadanie brzegu obszaru osiągalności. Jeśli zbiór dopuszczalnych prędkości gładko zależy od punktu i jest typowy (cokolwiek to słowo oznacza), to brzeg obszaru osiągalności składa się z gładkich kawałków i punktów osobliwych (punktów niegładkości). Okazuje się, że typowe osobliwości brzegu zbioru osiągalności są czterech typów. Trzy z nich są bardzo proste; są takie same jak wykresy funkcji

$$1^\circ \quad y = |x|, \quad 2^\circ \quad y = x|x|, \quad 3^\circ \quad y = x^2|x|.$$

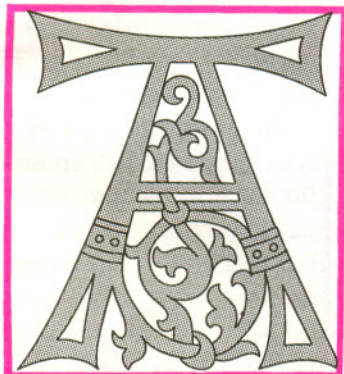
Czwarta osobliwość jest bardziej złożona i nie opiszemy jej tutaj.

Osobliwości typu 1° i 2° można zobaczyć na przykładzie przedstawionym na rysunku 10. Zakłada się, że zbiór dopuszczalnych prędkości jest stały i dopuszczalne prędkości leżą w kącie o rozwartości mniejszej od 180° . Dopuszczalne wektory na brzegach tych kątów określają graniczne prędkości. Mamy dwa pola granicznych prędkości; każde z nich ma swoje trajektorie. Dostajemy dwie rodziny krzywych zwanych **granicznymi krzywymi** (patrz rys. 9).



Rys. 10

W sytuacji z rysunku 10 brzeg obszaru osiągalności składa się z kawałków granicznych krzywych i z kawałków brzegu. Punkty rozdzielające te kawałki są osobliwościami typu 1° (kąt) i typu 2° (nieciągłość krzywizny).



Rozwiązanie zadania M781. Mleko nie wywołuje uzależnienia (jest to pogląd autora zadań, niekoniecznie odzwierciedlający poglądy redakcji *Delty*). Poza tym tylko część kowbojów przesiaduje w saloonach samotnie (nawet gdy nie-kowboje z niezrozumiałych względów omijają saloony). Przeprowadźmy obliczenia podobnie jak w zadaniu M780. Niech

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{jeśli do } i\text{-tego saloonu zawitał dokładnie jeden kowboj,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wówczas $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{100}$ jest liczbą kowbojów pijących samotnie. Mamy, oczywiście,

$$\begin{aligned} EY &= E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{100}) = EY_1 + EY_2 + \dots + EY_{100} = \\ &= P(Y_1 = 1) + P(Y_2 = 1) + \dots + P(Y_{100} = 1) = 100 \cdot \binom{100}{1} \cdot \frac{1}{100} \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{99} = \\ &= \frac{100^2}{99} \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{99} \leq \frac{100^2}{99e} = 37,15\dots \end{aligned}$$

Średnia liczba kowbojów pijących samotnie nie sięga więc połowy ogólnej ich liczby, wbrew insynuacjom szeryfa.