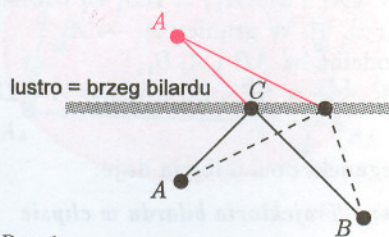


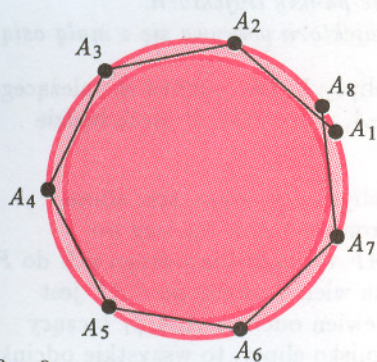
Twierdzenie Ponceleta dla bilardu w elipsie

Rafał KOŁODZIEJ

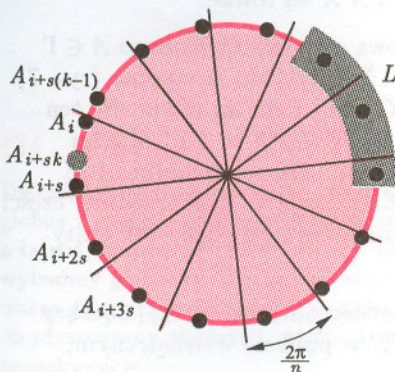


Rys. 1

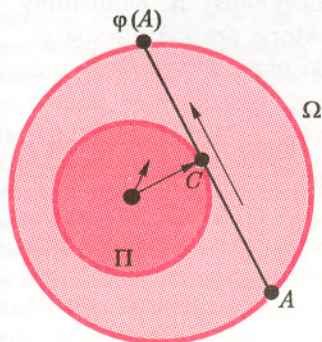
Proszę sprawdzić, że kąt wpisany rzeczywiście jest równy kątowi między cięciwą i okręgiem.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Większość z nas uderzała w kulę bilardową na prostokątnym stole bilardowym. Zasady gry zależą od rodzaju rozgrywki, natomiast ruch kuli bilardowej nie. O ile kuli nie nadajemy rotacji, odbija się ona od bandy zgodnie z prawem *kąt padania równa się kątowi odbicia*. Wystarczy odbić odcinek BC względem brzegu stołu, aby wykazać, że prawo to jest równoważne innemu: kula odbija się od brzegu w takim punkcie C , by jej droga z punktu A do punktu B była najkrótsza (jest to tzw. *zasada Fermata*, zob. rys. 1).

Spróbujmy zobaczyć, jak wygląda ruch bili na stole w kształcie koła. Uderzona bila odbija się kolejno od brzegu stołu (okręgu) w punktach A_1, A_2, A_3 , itd.; ciąg punktów: A_1, A_2, A_3, \dots nazywamy *trajektorią*, a sumę wszystkich odcinków $A_i A_{i+1}$ – *torem ruchu bili* (rys. 2). Załóżmy, że okrąg ma promień równy 1. Wówczas długość łuku okręgu między punktami A_i i A_{i+1} możemy mierzyć kątem środkowym opartym na tym łuku, albo – równie dobrze – dwukrotnie mniejszym kątem wpisanym. Ten z kolei jest równy kątowi między cięciwą $A_i A_{i+1}$ i okręgiem (czy też dokładniej, styczną do niego w punkcie A_i). Wynikają z tego dwa fakty: (a) równość kątów między cięciwą a okręgiem oraz (b) równość łuków, na których oparte są sąsiednie odcinki toru.

Zatem trajektoria punktu w bilardzie o kształcie koła jest trajektorią *obrotu* – o kąt, na którym oparty jest odcinek $A_i A_{i+1}$.

Twierdzenie 1. *Trajektoria obrotu jest okresowa albo gęsta (gęstość oznacza, że do każdego łuku okręgu należy pewien punkt trajektorii).*

Dla dowodu rozpatrzmy dwa przypadki:

1. Długość łuku $A_i A_{i+1}$ jest liczbą współmierną z 2π , czyli $\frac{A_i A_{i+1}}{2\pi}$ jest liczbą wymierną p/q . Wtedy trajektoria jest okresowa z okresem q , bo łuk $A_i A_{i+q}$ ma długość $2\pi \cdot p$.
2. $\frac{A_i A_{i+1}}{2\pi}$ jest liczbą niewymierną.

By zakończyć dowód Twierdzenia 1, wystarczy udowodnić następujący

Lemat. *Trajektoria obrotu o kąt niewspółmierny z 2π jest gęsta na okręgu.*

Dowód lematu (nie wprost). Załóżmy przeciwnie, że pewien łuk L nie zawiera żadnego punktu trajektorii A_1, A_2, A_3, \dots . Pokryjmy okrąg n łukami o długości $\frac{2\pi}{n}$, gdzie n dobieramy tak, aby $\frac{2\pi}{n} < L$ (patrz rys. 3). Ponieważ trajektoria ma więcej niż n punktów, więc dzięki *zasadzie szufladkowej Dirichleta* znajdziemy łuk pokrycia, na którym leżą dwa punkty trajektorii A_i, A_{i+s} . Wystarczy rozpatrzeć $k+1$ punktów trajektorii punktu A_i w obrocie o kąt $A_i A_{i+s}$, czyli zbiór punktów $A_i, A_{i+s}, A_{i+2s}, A_{i+3s}, \dots, A_{i+(k-1)s}$, gdzie $k \cdot A_i A_{i+s} > 2\pi$, aby w dowolnym łuku dłuższym niż $A_i A_{i+s}$, w szczególności w łuku L , znalazł się jeden z nich. ■

Zdefiniujmy teraz inne przekształcenie φ okręgu, które na pierwszy rzut oka nie wygląda na obrót, a jednak... Najpierw wewnątrz koła wyznaczonego przez okrąg Ω wybierzmy okrąg Π .

Definicja. *Obrazem punktu $A \in \Omega$ jest taki punkt $\varphi(A) \in \Omega$, że odcinek $A\varphi(A)$ jest styczny do okręgu Π i, co więcej, w punkcie styczności C zwrot wektora $\overrightarrow{A\varphi(A)}$ jest przeciwny do ruchu wskazówki zegara na tarczy Π (patrz rys. 4).*

Aby zrozumieć, że φ jest (w pewnym sensie...) obrotem, wyobraźmy sobie, że okrąg Ω jest wykonany z bardzo cienkiego drutu o zmiennej gęstości masy; matematycy mówią w takiej sytuacji o *gęstości miary*. Odległość punktów mierzymy nie długością łuku, lecz masą kawałka drutu zawartego między punktami. Drut dobierzmy w ten sposób, aby gęstość miary w punkcie A była proporcjonalna do $\frac{1}{AC}$.

Wielkie twierdzenie Ponceleta w klasycznym sformułowaniu głosi, mówiąc niezbyt precyzyjnie, że: jeśli dla dwóch stożkowych Γ_1 i Γ_2 istnieje n -kąt $A_1A_2 \dots A_n$ wpisany w Γ_1 i opisany na Γ_2 , to dla dowolnych punktów $B', B'' \in \Gamma_1$, takich, że prosta $B'B''$ jest styczna do Γ_2 , istnieje wielokąt $B'B''B_3 \dots B_n$ wpisany w Γ_1 i opisany na Γ_2 . Znanie w literaturze dowody tego twierdzenia nie są ani łatwe, ani krótkie; zainteresowanych odsyłamy do XVI rozdziału *Géométrie* M. Bergera, wyd. Cedic – Fernand Nathan, Paris 1977 (istnieje przekład rosyjski).

Z twierdzeniem Ponceleta wiąże się w oczywisty sposób tekst Michała Stukowa opublikowany w *Delcie* 4/1997.

Red.

Takie spojrzenie pozwoli nam podać szkic dość prostego dowodu tzw. wielkiego twierdzenia Ponceleta.

Twierdzenie 2 (tw. Ponceleta, przypadek szczególny). Dla ustalonego Π , φ jest obrotem (przy nowym sposobie mierzenia łuku), tzn. zachowuje długość łuku.

Dowód. Wystarczy wykazać, że długości łuków AA_1 i $\varphi(AA_1) = BB_1$ są równe. Dla krótkiego łuku oznacza to, że $\frac{AA_1}{AC} \simeq \frac{BB_1}{BC}$ (rys. 5). W granicy $A_1 \rightarrow A$ możemy zastąpić punkt C punktem przecięcia odcinków AB i A_1B_1 , tzn. punktem D . Ale, oczywiście, mamy równość $\frac{AA_1}{AD} = \frac{BB_1}{BD}$, bo trójkąty AA_1D i BB_1D są podobne (dlaczego?). ■

Zagrajmy teraz bilą na eliptycznym stole Γ . Elegancki opis odbicia daje:

Twierdzenie 3 (małe twierdzenie Ponceleta) Trajektoria bilardu w elipsie spełnia jeden z następujących warunków:

1. Każdy odcinek łączący sąsiednie punkty trajektorii przechodzi przez ognisko elipsy.
2. Istnieje elipsa Δ współogniskowa z Γ , do której są styczne wszystkie odcinki łączące sąsiednie punkty trajektorii.
3. Istnieje hiperbola Δ współogniskowa z Γ , do której są styczne wszystkie proste zawierające odcinki łączące sąsiednie punkty trajektorii.
4. Każdy odcinek łączący sąsiednie punkty trajektorii pokrywa się z małą osią elipsy.

Dowód (szkic). Niech E i F będą ogniskami elipsy Γ . Dla punktu A należącego do elipsy niech L_A oznacza styczną do elipsy w A , natomiast A' niech będzie odbiciem ogniska F względem L_A (rys. 6).

Droga z punktu E do F przez każdy punkt na elipsie jest stała, tzn. suma $EA + AF$ nie zależy od wyboru A . Z drugiej strony, styczna L_A leży po przeciwnej stronie Γ niż E i F , zatem droga EAF to najkrótsza droga z E do F przez punkt prostej L_A . Dzięki zasadzie Fermata wiemy zatem, że EAF jest fragmentem toru ruchu bili (rys. 6); jeśli więc pewien odcinek A_iA_{i+1} łączący sąsiednie punkty trajektorii przechodzi przez ognisko elipsy, to wszystkie odcinki A_iA_{i+1} mają tę własność (warunek 1 z tezy Tw. 3).

Uwaga 1. Dla każdego $X \in L_A$ odległości FX i $A'X$ są równe.

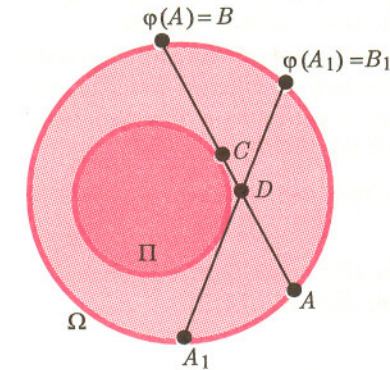
Rozpatrzmy teraz pewną elipsę Δ współogniskową z Γ . Dla ustalonego $A \in \Gamma$ weźmy takie punkty $X, Y \in \Delta$, by odcinki XA i YA były do Δ styczne (rys. 7). Zgodnie z Uwagą 1 długości odcinków AA', AX', AY' i AF są równe. W ten sam sposób sprawdzamy, że $EX' = EX + XF = EY + YF = EY'$. Zatem trójkąty EAX' i EAY' są przystające, więc ich kąty przy wierzchołku A są równe. Łatwo sprawdzić, że równe są też kąty EAY i FAX . Z poprzedniej części dowodu wynika więc, że łamana YAX jest fragmentem toru ruchu bili (kąty padania i odbicia w punkcie A są równe).

Czytelnik Wnikliwy zechce sprawdzić, że gdy pewien odcinek A_iA_{i+1} łączący sąsiednie punkty trajektorii przecina odcinek EF w punkcie wewnętrznym, to zachodzi warunek 3 lub 4 z tezy Tw. 3. ■

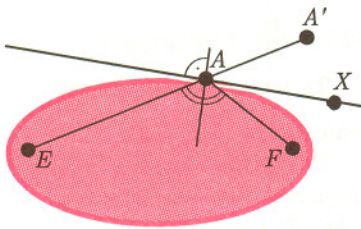
Z powodów technicznych ograniczymy dalsze rozważania do przypadku, gdy każdy odcinek toru ruchu bili jest styczny do ustalonej elipsy Δ . Zamienimy teraz sprytnie trajektorię bilardu w elipsie na trajektorię przekształcenia ϕ , a potem – na trajektorię φ (rys. 8 i okładka). Dzięki temu otrzymamy następujący wynik.

Twierdzenie 4 (Poncelet). Trajektoria bilardu w elipsie Γ jest okresowa ze stałym okresem $n(\Delta)$ (zależnym tylko od Δ) albo gęsta.

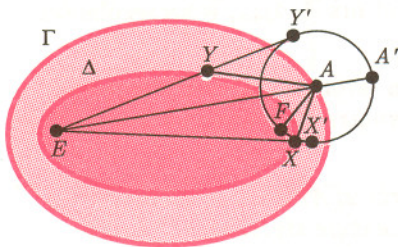
Dowód (szkic). Trajektorię bilardu A_1, A_2, A_3, \dots zamienimy na trajektorię B_1, B_2, B_3, \dots pewnego przekształcenia ϕ w następujący sposób. Odcinek A_iA_{i+1} jest styczny do Δ w punkcie X ; zdefiniujmy B_i jako X' . Udowodniliśmy już, że pewien okrąg o środku A_i zawiera punkty F, X', Y' i A'_i . Co więcej, okrąg ten jest styczny wewnątrz do okręgu o środku E i promieniu $R = EA'_i = EA_i + A_iF$ równym długości nici rysującej elipsę Γ .



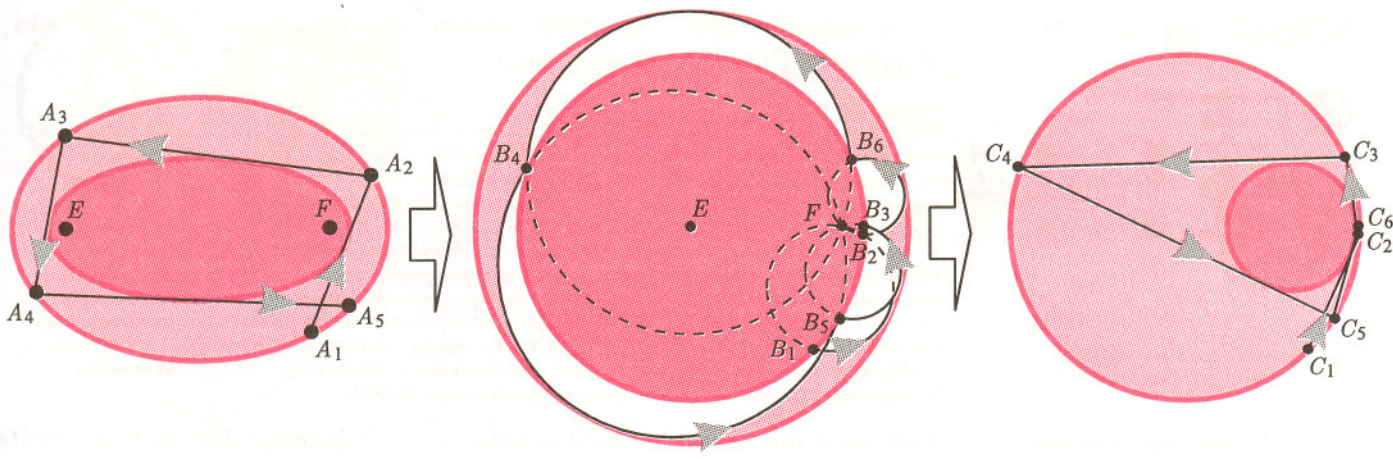
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Ponieważ $EB_i = EX + XF$ jest długością nitki rysującej elipsę Δ (czyli ma wartość stałą, niezależną od i), więc przekształcenie ϕ przeprowadzające B_i w B_{i+1} jest przekształceniem okręgu o środku E i promieniu $r = EX + XF$, gdzie $X \in \Delta$. Inaczej mówiąc, przy oznaczeniach z rysunku 7, ϕ przeprowadza punkt $X' = B_i$ w punkt $\phi(X') = Y' = B_{i+1}$.

Inwersja względem okręgu o środku F zamieni trajektorię B_1, B_2, B_3, \dots na trajektorię C_1, C_2, C_3, \dots przekształcenia φ . Zauważmy bowiem, że łuki $B_i B_{i+1}$ okręgów przechodzących przez F zamienią się po inwersji na odcinki, a okręgi o środku E i promieniach r, R przejdą na inne okręgi (niewspółśrodkowe; patrz rys. 8). Twierdzenie 2 tłumaczy, że C_1, C_2, C_3, \dots jest (przy odpowiednim sposobie mierzenia długości łuku) trajektorią obrotu. ■

Na koniec zadanie dla wytrwałych: proszę udowodnić twierdzenie Ponceleta bez założenia, że każdy odcinek łączący sąsiednie punkty trajektorii jest styczny do elipsy Δ .

Bilardzista, który chce trafić na stole eliptycznym w inną bilę w karambolu, musi więc umieć wyobrażać sobie elipsy i hiperbole współogniskowe (rysunek z okładki), tylko gdzie sprawdzić w praktyce nabytą wiedzę?

Oś globusa

Dlaczego każdy globus ma oś odchyloną od pionu? Przecież globus z osią pionową przedstawiałby tę samą Ziemię, a łatwiej byłoby go zrobić. Jednak nie jest to fantazja wytwórcy globusów. Pochylenie osi obrazuje bardzo ważny fakt przyrodniczy: oś ziemską nie jest prostopadła do płaszczyzny ziemskiej orbity. A ma to ogromne konsekwencje.

Gdyby oś ziemską była prostopadła do płaszczyzny orbity, to w dowolnym miejscu orbity, a więc przez cały rok, oświetlenie Ziemi przez Słońce byłoby stałe takie samo, w tym sensie, że granica między półkulą oświetloną i nieoświetloną (tzw. terminator) przechodziłaby zawsze przez bieguny. Człowiek znajdujący się na dowolnym równoleżniku miałby stałe 12-godzinny dzień i 12-godzinna noc, panowałaby więc permanentna równonoc.

W rzeczywistości jednak oś ziemską jest pochylona o około $23,5^\circ$ i, co więcej, w trakcie obiegięcia Słońca zachowuje stały kierunek w przestrzeni, a konkretnie jest stałe skierowana (w przybliżeniu) w Gwiazdę Polarną. Wskutek tego terminator tylko dwa razy w ciągu roku przechodzi przez bieguny (około 21 III i 21 IX), a między tymi datami Słońce oświetla bardziej albo północną, albo

południową półkulę Ziemi. Krótko mówiąc, pochylenie osi ziemskiej jest przyczyną występowania pór roku. Półkula północna jest najsilniej nasłoneczniona w okolicy 21 VI. Jest to początek naszego lata i zarazem data, gdy Słońce oświetla prostopadłymi promieniami miejsca Ziemi odległe na północ od równika o $23,5^\circ$ – bardziej na północ już się nie da, a równoleżnik o tej szerokości geograficznej to zwrotnik Raka. Oczywiście, na początku naszej zimy promienie prostopadłe padają na zwrotnik Koziorożca o szerokości $-23,5^\circ$. Tak więc ta sama przyczyna powoduje też występowanie stref klimatycznych na Ziemi.

A jak jest na innych planetach? Okazuje się, że rozmaicie. Oś obrotu Jowisza jest praktycznie prostopadła do płaszczyzny jego orbity, tam więc pór roku nie ma – panuje permanentna równonoc, a Słońce oświetla prostopadłe tylko równik planety. Oś obrotu Urana – przeciwnie – jest nachylona o około 90° , leży więc w płaszczyźnie jego orbity. Wskutek tego co pół tamtejszego roku Słońce oświetla prostopadłe raz jeden, raz drugi jego biegun. Wobec tego, może na Ziemi nie jest tak źle: nie jest tak monotonna jak na Jowiszu, ale też nie ma takich skrajności jak na Uranie.

Tomasz KWAST