

O zbieżności ciągów sum Riemanna, wzorach Stirlinga, Wallisa i...

Grzegorz RZĄDKOWSKI

W niniejszym artykule proponujemy Czytelnikom ciekawy i stosunkowo prosty dowód wzorów Stirlinga i Wallisa.

Po przebrnięciu przez niezbędne przygotowania techniczne otrzymamy nie tylko obie sławne równości, ale też swego rodzaju maszynę do produkowania innych, podobnych.

Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$.

Podzielmy ten przedział na n równych części punktami

$x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$). Suma Riemanna funkcji f , dana wzorem

$$(1) \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k),$$

to suma pól prostokątów o wysokościach $f(x_k)$ i jednakowych

podstawach $\frac{b-a}{n}$. Gdy $f > 0$, suma (1) przybliża pole figury ograniczonej od góry wykresem funkcji $f(x)$, od dołu osią x -ów,

a z boków prostymi $x = a$ i $x = b$. Gdy $n \rightarrow \infty$, to granicą ciągu sum

Riemanna jest właśnie owo pole, czyli całka $\int_a^b f(x) dx$.

Zastanówmy się, jak szybko ciąg sum Riemanna zmierza do swojej

granicy. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ ma na przedziale $[a, b]$ ciągłą

po pochodną (a na końcach przedziału, czyli w punktach $x = a$ i $x = b$,

ma pochodne jednostronne). Różnicę między całką a sumą Riemanna

możemy zapisać następująco:

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k)) dx.$$

Oznaczmy przez t_k środek przedziału $[x_{k-1}, x_k]$ (tzn. niech

$t_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$) i zastosujmy wzór na całkowanie przez części do

każdej z całek po prawej stronie (2), by po nietrudnym rachunku otrzymać

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k)) dx &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - t_k)' (f(x) - f(x_k)) dx = \\ &= \frac{b-a}{2n} (f(x_{k-1}) - f(x_k)) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - t_k) f'(x) dx. \end{aligned}$$

Po zsumowaniu względem k i pomnożeniu obydwu stron przez n otrzymujemy

$$\begin{aligned} n \left(\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right) &= \\ &= \frac{b-a}{2} (f(a) - f(b)) - n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - t_k) f'(x) dx. \end{aligned}$$

Dyski protoplanetarne

Michał RÓŻYCZKA

Współczesna teoria ewolucji układów planetarnych opiera się na założeniu, iż powstają one jednocześnie ze swymi gwiazdami centralnymi z gęstych obłoków materii międzygwiazdowej, w których nad wszystkimi pozostałymi siłami przeważały w pewnym momencie siły samograwitacji. Założenie to ma dziś mocną podstawę obserwacyjną. Po pierwsze, na gęste obłoki zbudowane z cząsteczek wodoru oraz tlenu węgla i innych związków chemicznych (tzw. obłoki molekularne) przypada ponad połowa masy ośrodka międzygwiazdowego (budulca na gwiazdy i planety jest więc w naszej Galaktyce wystarczająco dużo). Po wtóre, najgęstsze obłoki molekularne (a więc te, w których siły samograwitacji są najsilniejsze) mają masy porównywalne z masami gwiazd. Po trzecie wreszcie, młode gwiazdy występują wyłącznie w obłokach molekularnych lub w ich bezpośrednim sąsiedztwie.

W najgęstszych obłokach obserwuje się ruchy, które mogą być zinterpretowane jako obrót wokół dobrze określonej osi. Zgodnie z teorią, samograwitacyjne kurczenie się (tzw. kolaps) obłoku obdarzonego ruchem obrotowym prowadzi do powstania niewielkiego, stacjonarnego obiektu centralnego otoczonego rozległym dyskiem (tzw. dyskiem akrecyjnym). Wnętrze dysku jest również niemal stacjonarne (wszelkie ruchy poza ruchem obrotowym wokół obiektu centralnego odbywają się z prędkościami dużo mniejszymi niż lokalna prędkość orbitalna). Faza kolapsu jest bardzo krótka, trwa bowiem nie więcej niż 10^5 lat.

Uformowany już dysk podlega dalszej powolnej ewolucji, w której trakcie znajdująca się w nim materia częściowo osiada na obiekcie centralnym (proces ten nosi nazwę akrecji), częściowo zaś jest wywiewana w przestrzeń międzygwiazdową. Podczas trwającej kilka milionów lat fazy akrecji centralny obiekt dysku przekształca się w protogwiazdę, która od zwykłej gwiazdy różni się jedynie tym, iż w jej wnętrzu nie zachodzą jeszcze reakcje jądrowe. Jednocześnie w całym dysku z pierwiastków i związków chemicznych, które w macierzystym obłoku znajdowały się w stanie gazowym, powstają ziarna pyłowo-łodowe. Pod wpływem grawitacji ziarna te przemieszczają się następnie w pobliże płaszczyzny równikowej dysku.

Jeśli chaotyczne ruchy składowej gazowej dysku (turbulencja) nie są zbyt silne, wędrownka ziaren jest procesem bardzo szybkim: na dotarcie do płaszczyzny

równikowej ziarna (nawet te powstałe tuż przy powierzchni dysku) potrzebują nie więcej niż stu lat. W płaszczynie równikowej wykształca się bardzo cienki dysk pyłowy, którego grubość może być nawet stokrotnie mniejsza od grubości dysku gazowego. Dysk o tak znikomej grubości wykazuje naturalną tendencję do rozpadu na fragmenty o masach rzędu 10^{15} kg, które pod wpływem samograwitacji w ciągu paru tysięcy lat skupiają się w planetozymale – obiekty o rozmiarach kilkudziesięciu kilometrów. Jeśli natomiast turbulencja jest silna (to znaczy: jeśli prędkości ruchów chaotycznych są porównywalne z prędkością dźwięku), cienki dysk pyłowy nie wykształca się. W takim przypadku planetozymale powstają wskutek przypadkowego zlepiania się ziaren pyłu chaotycznie krążących po całej objętości dysku, czas zaś potrzebny do ich utworzenia jest znacznie dłuższy i wynosi około stu tysięcy lat.

W toku dalszej ewolucji dysku nieelastyczne zderzenia między planetozymalami prowadzą do powstania protoplanet. Trwająca od dziesięciu do kilkuset milionów lat faza powstawania protoplanet jest najdłuższą z faz ewolucji dysku protoplanetarnego. Planetozymale, które przetrwały ją w nienaruszonym stanie, mogą być obserwowane w uformowanym już układzie planetarnym jako komety lub planetoidy.

Jak zatem widać, według współcześnie rozwijanej teorii dysk protoplanetarny jest kluczowym ogniwem w łańcuchu przemian prowadzących od obłoku materii międzygwiazdowej do otoczonej planetami gwiazdy. Pięknym potwierdzeniem tych teoretycznych przewidywań są prowadzone od kilku lat obserwacje dysków protoplanetarnych, którymi zajmujemy się w dalszej części tego artykułu.

Obecność dysku przy młodej gwiazdzie lub protogwiazdzie najłatwiej jest wykryć prowadząc obserwacje w podczerwieni. Objawia się on jednak wtedy nie jako obiekt o określonym kształcie i rozmiarach, lecz tylko jako „garb” w podczerwonej części widma (rys. 1). Promieniowanie podczerwone po części powstaje w samym dysku kosztem energii grawitacyjnej gazu i pyłu opadającego na ciało centralne, po części zaś jest przetworzonym promieniowaniem ciała centralnego. W miarę wyczerpywania się gazu i pyłu podczerwony garb maleje aż do zupełnego zaniku w widmie dojrzałej gwiazdy z całkowicie już uformowanym układem planetarnym.

Obserwacje w podczerwieni są wymownym, lecz jednak tylko pośrednim dowodem istnienia dysków protoplanetarnych. Dzięki obserwacjom prowadzonym w zakresie widzialnym (przede wszystkim za pomocą

Teraz przechodzimy do granicy po obu stronach poprzedniej równości, wykorzystując zależność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - t_k) f'(x) dx = 0.$$

(Czytelnik spróbuje samodzielnie udowodnić, że tak istotnie jest przy założeniu ciągłości f' w $[a, b]$.) Końcowy efekt naszych przygotowań technicznych to wzór

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right) = \frac{b-a}{2} (f(a) - f(b)).$$

Podamy teraz kilka jego interesujących zastosowań. Weźmy pod uwagę funkcję $f(x) = \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x}$ i określmy jej wartości na całym przedziale $[0, 1]$, kładąc $f(0) = \ln \frac{\pi}{2}$. Tak określona funkcja jest ciągła na przedziale $[0, 1]$. Czytelnik zechce sprawdzić, że f ma na $[0, 1]$ również ciągłą pierwszą pochodną. Suma Riemanna funkcji f ma postać

$$(4) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \left[\ln \left(\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \dots \sin \frac{n\pi}{2n} \right) - \ln \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \dots \frac{n}{n} \right) \right].$$

W dalszym ciągu wykorzystamy dwa znane wzory, które Czytelnik (o ile ich nie zna) może spróbować udowodnić sam lub wyszperać w różnych zbiorach zadań z analizy matematycznej, np. [1] i [2]. Oto one:

$$(5) \quad \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \sin \frac{3\pi}{2n} \dots \sin \frac{n\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Stosując je do wyrażenia całki funkcji f oraz jej sumy Riemanna, dostaniemy zależności

$$(6) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \ln \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} - \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = \frac{\ln n}{2n} - \frac{n-1}{n} \ln 2 - \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n},$$

$$(7) \quad \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = 1 - \ln 2.$$

Obie powyższe równości wstawiamy do wzoru (3) i spokojnie rachując mamy kolejno:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \ln 2 - \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n} + \frac{n-1}{n} \ln 2 + \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{1}{2} \ln n - \ln 2 + \ln \frac{n!}{n^n} - \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{e^n n!}{\sqrt{2\pi n} n^n} \right) = 0$$

lub inaczej

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = 1.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wzór Stirlinga (8) wielokrotnie wykorzystywany w różnych artykułach w *Delcie* (np. na str. 4).

Zastosujmy teraz nasz wzór (3) do funkcji $f(x) = \ln \frac{(1+x) \sin \frac{\pi}{2} x}{x}$ określonej na przedziale $[0, 1]$ (z dodatkową umową, że $f(0) = \ln \frac{\pi}{2}$).

Funkcja ta, podobnie jak poprzednia, jest na przedziale $[0, 1]$ ciągła wraz ze swą pochodną. Bez wdawania się w zbędne szczegóły rachunkowe (Czytelnik w razie potrzeby zdoła je niewątpliwie samodzielnie uzupełnić) powiemy tylko, że suma Riemanna f i jej całka oznaczona wyglądają następująco:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \ln \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} - \frac{1}{n} \ln \frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x} dx + \int_0^1 \ln(1+x) dx = \ln 2,$$

wzór (3) zaś po kosmetycznych zabiegach przybierze tym razem postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!} = \sqrt{\pi}.$$

Powyższy wzór to jedna z postaci znanego wzoru Wallisa wykorzystywanego często w podręcznikowych dowodach wzoru Stirlinga (patrz np. [3]). Tutaj otrzymaliśmy oba wzory niezależnie.

Zastosujmy jeszcze z ciekawości wzór (3) do kilku innych funkcji.

Weźmy, na przykład, $f(x) = \ln \frac{(2+x) \sin \frac{\pi}{2} x}{x}$ określoną na przedziale $[0, 1]$ z $f(0) = \ln \pi$. Rozumowanie podobne do poprzednich prowadzi w tym przypadku do wzoru

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{3n} n! (2n)!}{\sqrt{n} 2^{2n+1} (3n)!} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

Dla $f(x) = \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x(1+x)}$ na przedziale $[0, 1]$ z $f(0) = \ln \frac{\pi}{2}$ otrzymujemy:

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n} (2n)!}{2\sqrt{n\pi} (2n)^{2n}} = 1,$$

czyli wzór Stirlinga (8), w którym podstawiono $2n$ zamiast n .

Dla $f(x) = \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x(2+x)}$ na przedziale $[0, 1]$ z $f(0) = \ln \frac{\pi}{4}$ mamy z kolei

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n} 2^{2n} (3n)! (n)!}{\sqrt{3n\pi} 3^{3n} (n)^{2n} (2n)!} = 1.$$

Dzieląc stronami (10) przez (9) otrzymujemy jeszcze jeden interesujący wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (3n)! n!}{3^{3n} ((2n)!)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

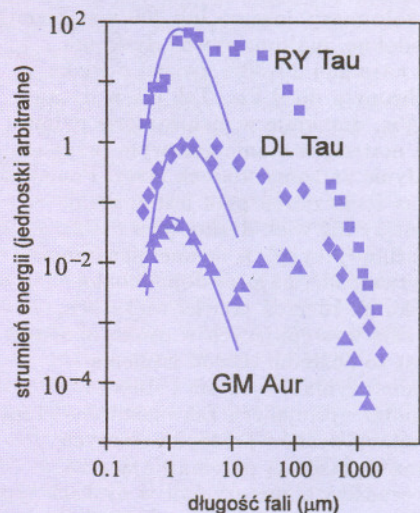
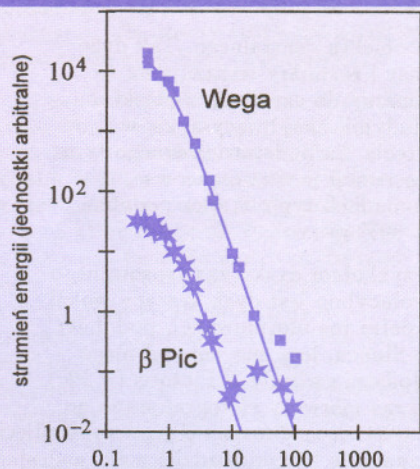
Widać, że wyżej opisany sposób prowadzi do uzyskania wielu ciekawych i użytecznych wzorów. Wyprowadzenie dalszych pozostawiamy inwencji Czytelnika.

Literatura:

[1] J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*. WNT, Warszawa 1993.

[2] L. Jeśmanowicz, J. Łoś, *Zbiór zadań z algebry*. PWN, Warszawa 1972.

[3] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*. PWN, Warszawa 1979.



Rys. 1. Podczerwone nadwyżki w widmach układów protoplanetarnych świadczące o obecności dysków akrecyjnych. Liniami ciągłymi oznaczono widma samych obiektów centralnych. teleskopu Hubble'a) oraz w zakresie radiowym przez radioteleskopy pracujące na falach milimetrowych mamy również dowody bezpośrednie: od paru lat niektóre (nieliczne na razie) dyski możemy po prostu oglądać. Piękną kolekcję zdjęć dysków (uzyskaną za pomocą teleskopu Hubble'a) krążących wokół młodych gwiazd i protogwiazd w gromadzie „Trapez” (gwiazdozbiór Oriona) możemy obejrzeć na okładkach. Typowa masa takiego dysku jest zbliżona do tzw. minimalnej masy mgławicy słonecznej, którą otrzymuje się poprzez „uzupełnienie” pierwiastków występujących w naszym układzie planetarnym tak, by ich proporcje wagowe odpowiadały proporcjom obserwowanym na Słońcu, i która wynosi $0,01 M_{\odot}$. Promienie dysków wahają się od kilkudziesięciu do kilkuset jednostek astronomicznych (jedna j.a. jest równa średniemu promieniowi orbity Ziemi). W niektórych przypadkach rozrzedzona materia gazowa i pyłowa bywa jednak obserwowana aż do odległości 2000 j.a.