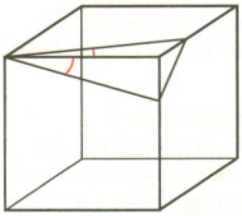
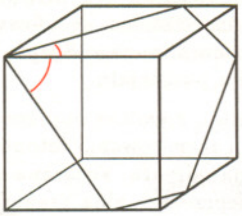
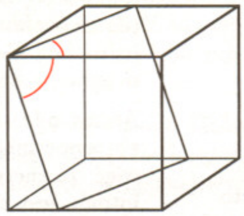
mała delta

Wirtualny czworościan


Rys. 1

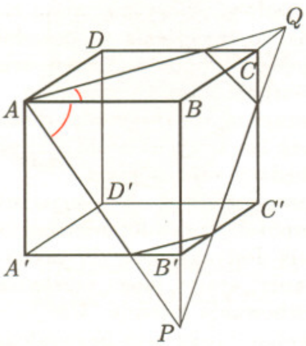

Rys. 2


Rys. 3

Rozwiążmy zadanie:

Sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi 1 jest przecięty taką płaszczyzną przechodzącą przez A, że jej przecięcia ze ścianami $ABCD$ i $ABB'A'$ tworzą z krawędzią AB taki sam kąt α. Obliczyć objętość odciętej bryły.

Bryły, na które płaszczyzna rozcina sześcian, są dwie. Wystarczy jednak znać objętość jednej z nich, by znać również objętość drugiej, gdyż ich suma jest równa 1. Będziemy tutaj poszukiwać objętości bryły zawierającej krawędź AB.



Rys. 4

Dopóki kąt α nie przekracza $45°$, zadanie jest bardzo łatwe (rys. 1) – odcięta bryła to czworościan o trzech krawędziach wzajemnie prostopadłych, wychodzących z jednego wierzchołka. Objętość zatem to jedna szósta ich iloczynu, czyli

$$\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\alpha\,.$$

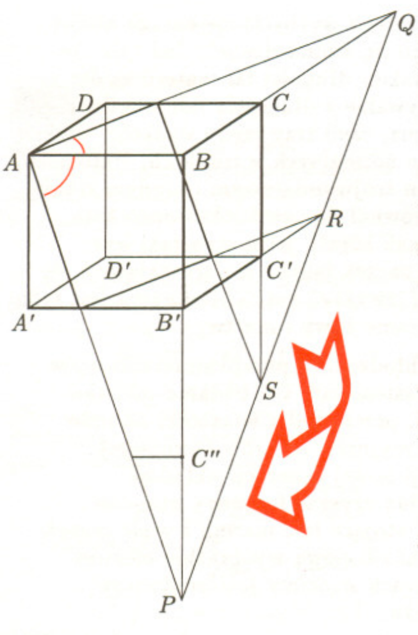
Sytuacja, jaka powstaje, gdy kąt ten przyjmuje większe wartości, staje się skomplikowana tylko do chwili, gdy nie wpadniemy na pomysł, by czworościan, którego objętość obliczyliśmy, narysować również w pozostałych przypadkach. Teraz wystaje on wyraźnie z sześcianu, ale okazuje się, że to nic nie szkodzi.

W przypadku, gdy kąt α przyjmuje wartości większe od $45°$, ale nie przekraczające φ_2 (gdzie φ_2 oznacza kąt ostry, którego tangens jest równy 2), z sześcianu wystają dwa rogi, z których każdy jest czworościanem podobnym do całego (a nawet jednokładnym). Z rysunku 4 widać, że stosunek podobieństwa to

$$s_1 = \frac{B'P}{BP} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 - \operatorname{ctg}\alpha\,.$$

W przypadku, gdy α przekracza φ_2, rogi są tak duże, że aż częściowo nakładają się. Szczęśliwie ich część wspólna jest też podobna (a nawet jednokładna) do całości. Tym razem stosunek podobieństwa (rys. 5) to

$$s_2 = \frac{C'R}{BQ} = \frac{C''P}{BP} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 2}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 - 2\operatorname{ctg}\alpha\,.$$



Rys. 5

Tak więc posługując się czworościanem, który istnieje tylko w naszej wyobraźni, znajdujemy objętość realnej bryły:

$$V = \frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\alpha(1 - 2k^3 + l^3),$$

gdzie

$$k = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \alpha \le 45° \\ s_1 & \text{gdy } \alpha > 45° \end{cases}, \qquad l = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \alpha \le \varphi_2 \\ s_2 & \text{gdy } \alpha > \varphi_2 \end{cases}.$$

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS