Automaty komórkowe

Anna LUDWICKA

Automaty komórkowe (nie mylić z telefonami komórkowymi) są matematycznym sposobem opisu zjawisk fizycznych, biologicznych, czy społecznych, w których czas i przestrzeń traktowane są w sposób dyskretny, a elementy przestrzeni wykazują lokalne zależności. Pojęcie to zostało wprowadzone przez von Neumanna i Ulama w 1963 r. Automat komórkowy (a.k.) składa się z komórek, które mogą być przedstawiane jako węzły regularnej siatki, skończonej lub nie. Komórki (węzły siatki) przyjmują wartości ze skończonego zbioru. W skład automatu wchodzi także tzw. *reguła ewolucji* zadana lokalnie, która określa stan danej komórki w zależności od jej stanu, jak i stanów komórek sąsiednich, w poprzednim kroku ewolucji. Przy określaniu ewolucji mogą być uwzględniane także dalej położone komórki, nie tylko te, które bezpośrednio przylegają do danej.

krok	
0	010110110101011100010
1	0011011000001011010

Rys. 1

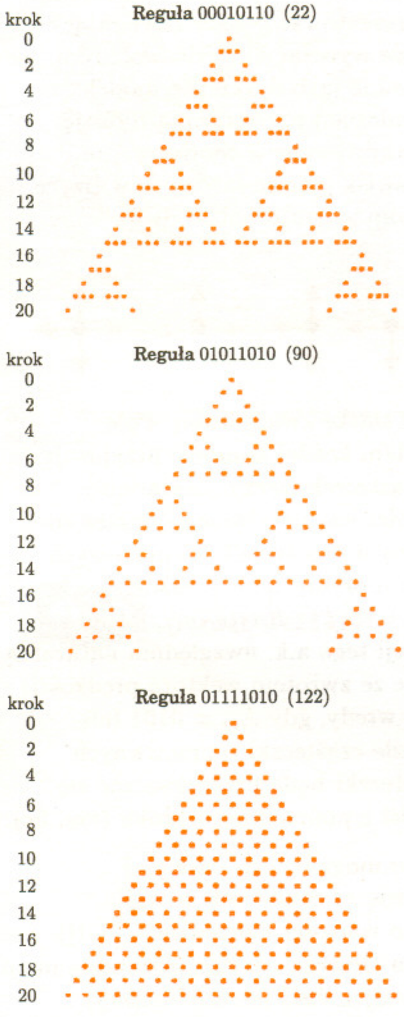
Najprostsze automaty komórkowe są jednowymiarowe z dwiema możliwymi wartościami: 0 albo 1, a sąsiedztwa są trójelementowe: dana komórka i dwie sąsiednie, po prawej i lewej stronie. Konfiguracją początkową jest w tym przypadku rozkład wartości w komórkach położonych wzdłuż prostej. Reguły ewolucji komórek definiują zmianę wartości komórki i w kroku czasowym t (oznaczmy ją przez $w(i,t)$) w zależności od wartości komórek i, $i-1$ oraz $i+1$ w kroku poprzednim $(t-1)$:

$$w(i-1,t-1), w(i,t-1), w(i+1,t-1)$$
$$\downarrow$$
$$w(i,t)$$

Przykładową regułą jednowymiarowego automatu komórkowego jest:

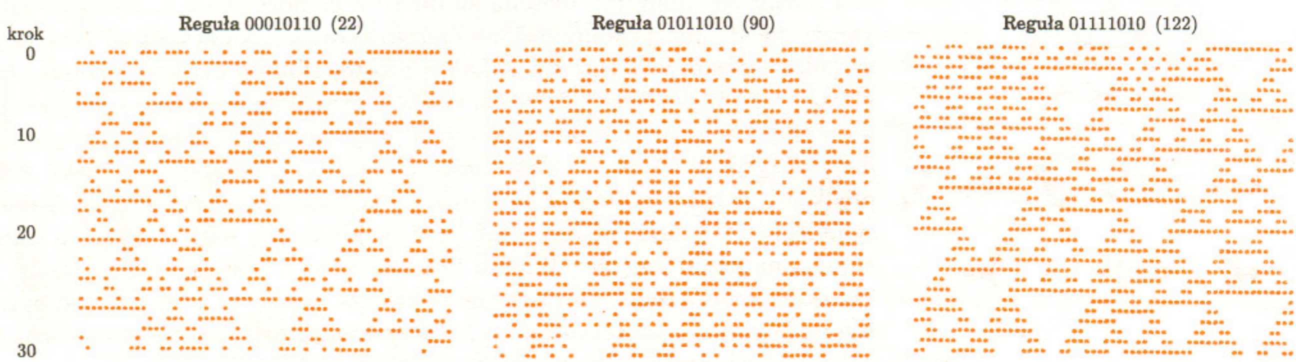
111	110	101	100	011	010	001	000
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	0	1	1	0	1	0

Nazywa się ją *regułą* 01011010 zgodnie z tym, co występuje w dolnym wierszu. Lokalne reguły tego typu automatów są opisane ośmiocyfrową liczbą binarną. Jak łatwo można zauważyć, takich różnych reguł jest $2^8 = 256$. Ale w rzeczywistości nie wszystkie są sensowne, ponieważ muszą być na nie nałożone pewne dodatkowe warunki. Pierwszy warunek powiada, że reguła jest *nielegalna*, gdy na ostatnim miejscu jest 1. Drugi, że reguły muszą być symetryczne, tzn. 100 i 001 dają tę samą wartość. To uściślenie zostawia tylko 32 *legalne* reguły automatów komórkowych. Rysunek 1 pokazuje ewolucję pewnego stanu a.k., czyli zmianę wartości komórek po jednym kroku czasowym, zgodnie z wyżej wymienioną regułą. Przykładowe ewolucje jednowymiarowych a.k., z konfiguracją początkową: $\ldots 0, 0, 1, 0, 0 \ldots$, pokazane są na rysunku 2.

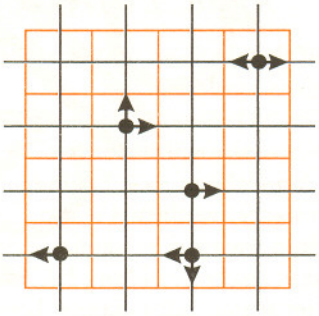


Rys. 2

Ciekawszymi automatami jednowymiarowymi są takie, w których wartości w stanie początkowym przyjmujemy z pewnym prawdopodobieństwem. Rysunek 3 pokazuje przykładową ewolucję a.k. z wartościami początkowymi przyjmowanymi z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ i z cyklicznym warunkiem brzegowym (tzn. lewym sąsiadem komórki pierwszej jest ostatnia komórka po prawej stronie).



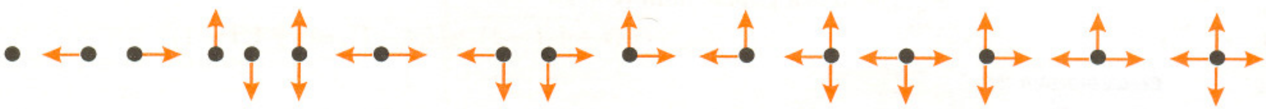
Rys. 3



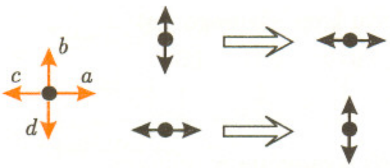
Rys. 4

Przejdźmy teraz do automatów komórkowych dwuwymiarowych, które odgrywają znaczącą rolę w modelowaniu matematycznym. Tutaj komórki znajdują się na płaszczyźnie. Mogą one mieć kształty np. kwadratów lub sześcioboków, w zależności od tego, co chcemy modelować. Najprostszym dwuwymiarowym a.k. jest gra *życie* przedstawiona w *Delcie* 1/1997 (str. 10) z komórkami kwadratowymi i regułą: komórka „rodzi się", gdy ma dokładnie trzech sąsiadów w poprzednim kroku, „umiera", gdy nie ma sąsiadów, ma tylko jednego sąsiada lub więcej niż trzech (zatłoczenie).

Za pomocą automatów komórkowych można modelować układy fizyczne zawierające wiele dyskretnych elementów z lokalnymi zależnościami. Na poziomie mikroskopowym komórki mogą reprezentować atomy lub wartości pewnych wielkości fizycznych w krysztale. W większości układów na poziomie makroskopowym każdy węzeł w a.k. może reprezentować obszar zawierający wiele cząsteczek, a przypisana mu wartość może wyrażać kilka dozwolonych stanów. W tym przypadku a.k. mogą być używane jako dyskretne modele układów chemicznych opisujących reakcje chemiczne i przestrzenną dyfuzję (rozprzestrzenianie się). Mogą być także wykorzystywane w modelowaniu ewolucji galaktyk lub być narzędziem opisu zjawisk przejść fazowych w fizyce. Także przepływ cieczy można modelować za pomocą automatów dwu- i trójwymiarowych.



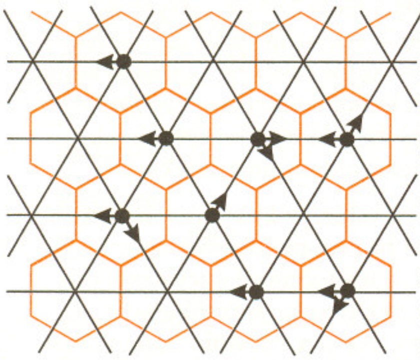
a)



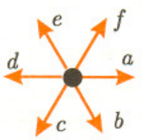
b) c)

Rys. 5

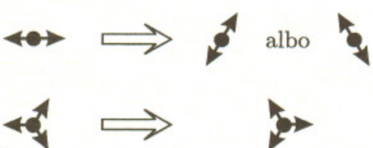
Przyjrzyjmy się bliżej takim modelom. Weźmy siatkę kwadratową. Pole prędkości wpisuje się w sieć komórek (rys. 4), tzn. każdej komórce przypisuje się odpowiedni wektor prędkości oraz liczbę cząsteczek cieczy. Zakładamy, że każdy z czterech możliwych zwrotów prędkości jest przyjmowany przez co najwyżej jedną cząsteczkę w węźle. Wyróżniamy w ten sposób 16 możliwych stanów węzła (rys. 5a). Stan takiego automatu możemy zapisać jako tablicę czteroelementowych ciągów zer i jedynek: $E_{ij} = d_{ij}c_{ij}b_{ij}a_{ij}$, gdzie $d_{ij}, c_{ij}, b_{ij}, a_{ij} \in \{0, 1\}$ (rys. 5b). Reguła ewolucji tego a.k. uwzględnia naturalną propagację (przemieszczanie cząsteczek zgodnie ze zwrotem wektora predkości) oraz zderzenia cząsteczek. Zderzenie następuje wtedy, gdy $E_{ij} = 0101$ lub $E_{ij} = 1010$, bo to znaczy, że spotkały się w węźle cząsteczki o przeciwnych zwrotach wektora prędkości. Po zderzeniu cząsteczki będą przemieszczać się w kierunku prostopadłym do kierunku prędkości z poprzedniego kroku (rys. 5c).



Zakładaliśmy, że w węźle powyższego automatu mogą być co najwyżej cztery cząsteczki. Załóżmy teraz, że może być więcej cząsteczek w węźle. Wtedy będziemy operowali pojęciem gęstości (o wartości z przedziału $[0, 1]$) cząsteczek poruszających się w danym kierunku. Jeszcze bardziej rozbudowanym automatem jest automat opisany na siatce heksagonalnej (sześciobocznej) (rys. 6a). Tutaj stan komórki jest opisany przez ciąg sześcioelementowy. Reguła ewolucji także składa się z propagacji i reguł zderzeń, które pokazuje rysunek 6b.



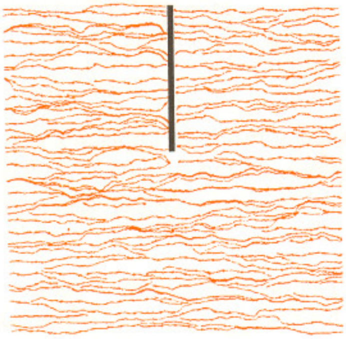
a)



b)

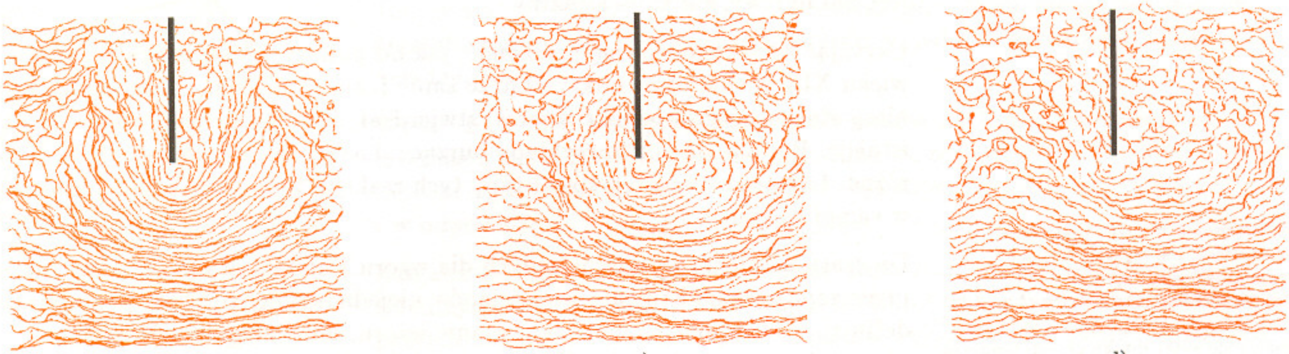
Rys. 6

Jak można się domyślać, metodą automatów komórkowych stosunkowo łatwo tworzy się symulacje komputerowe danego zjawiska. Na rysunku 7 widzimy symulację przepływu cieczy w kanale z prostopadłą do brzegów przeszkodą pokazywaną w pewnych odstępach czasu. Przeszkodę modeluje się wpisując do reguły ewolucji odbicia cząsteczek od niej, tzn. gdy cząsteczka osiągnie daną pozycję (miejsce, w którym jest przeszkoda), w następnym kroku wektor prędkości będzie miał inny zwrot, symulujący odbicie od przeszkody. Takie symulacje pozwalają zobaczyć, jak będą rozkładać się wiry, z jaką siłą ciecz napiera na przeszkodę etc. Wiedza ta jest pomocna konstruktorom zapór i mostów. Opis przepływu cieczy za pomocą a.k. nie jest oderwany od opisu wynikającego z praw zachowania. Już z tych najprostszych reguł ewolucji można wyprowadzić równania różniczkowe opisujące badane zjawisko.



a)

Automaty komórkowe służą także do modelowania układów biologicznych, gdyż przyrost liczebności organizmów można przedstawić lokalnymi regułami. Mogą one opisywać populacje nie poruszających się organizmów, np. roślin, z wartościami w komórkach mówiącymi o obecności lub braku organizmu i z lokalnymi ekologicznymi interakcjami. Proste zachowania ludzi mogą być także modelowane automatami komórkowym. Przykładem jest modelowanie rozkładu i ewolucji opinii społecznej np. przed wyborem spośród dwóch kandydatów, komórki (jednostki społeczne) przyjmują wartości TAK albo NIE. Przy modelowaniu tego zjawiska trzeba uwzględnić migrację ludzi, co komplikuje reguły a.k. Życzę Czytelnikom powodzenia w wymyślaniu reguł ewolucji jak najlepiej przybliżających rzeczywistość.



b) c) d)

Rys. 7. Symulacja komputerowa przepływu cieczy w kanale z przeszkodą: a) stan początkowy, b) po 100 krokach czasowych, c) po 300 krokach, d) po 500.

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 841. Niech n będzie dodatnią liczbą parzystą. Dowieść, że liczby $1, 2, \ldots, n-1$ można tak ustawić w ciąg, by żadna z sum kolejnych liczb ciągu nie była podzielna przez n.
Rozwiązanie na str. 15

M 842. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Niech O będzie punktem przecięcia odcinków łączących środki przeciwległych boków czworokąta. Dowieść, że $P_{OAB} + P_{OCD} = P_{OAD} + P_{OBC}$ (gdzie $P_{\mathbf{T}}$ oznacza pole trójkąta $\mathbf{T}$).
Rozwiązanie na str. 16

M 843. Dane jest $2n$ punktów na płaszczyźnie. Dowieść, że są one końcami n nie przecinających się odcinków.
Rozwiązanie na str. 8

Przygotował Piotr ZALEWSKI

F 473. Wśród poszukiwanych nowych cząstek elementarnych występują (w pewnych modelach) cząstki masywne, długożyciowe i silnie oddziałujące z materią (tzn. obdarzone „ładunkiem kolorowym", jak kwarki czy gluony). Zakładając, że istnieje taka cząstka X o masie $m_X = 150$ GeV/c^2, oszacować, ile pionów może powstać w wyniku zderzenia ze swobodnym nukleonem materii detektora, jeżeli pęd X wynosi $p = 80$ GeV/c. Przyjąć masę nukleonu $m = 1$ GeV/c^2 oraz pionu $m_\pi = 0{,}15$ GeV/c^2. Zakładamy przy tym, że cząstka X i nukleon nie ulegają destrukcji.
Rozwiązanie na str. 8

F 474. Podać jakościowy opis oddziaływania cząstki X z poprzedniego zadania z materią.
Rozwiązanie na str. 15