

# Rendez-vous fizyki z zasadami wariacyjnymi

Wojciech  
KOPCZYŃSKI

Pierwszy impuls do tego spotkania dał Heron z Aleksandrii (I wiek n.e.), który stwierdził, że równość kątów odbicia i padania jest konsekwencją postulatu, iż czas przelotu rzeczywistego promienia świetlnego między dwoma ustalonymi punktami jest (w porównaniu z jakimikolwiek pomyślanymi promieniami) lokalnie najmniejszy. Sposzczerzenie to zostało uogólnione przez Piotra de Fermata (1601–1665) na wszelkie (niekoniecznie odbijające się) promienie świetlne i uzyskało rangę zasady, opatrzonej później nazwiskiem jej autora. Fermat mógł na jej podstawie uzasadnić prawo załamania światła, a jego wytłumaczenie tego prawa przyszło w sukurs nieco wcześniejszemu wytłumaczeniu podanemu przez Krystiana Huygensa. To był pierwszy uścisk tytułowego spotkania.

Do następnego uścisku przyczynił się Jan Bernoulli (1667–1748), a o jego *brachistochronie* i rachunku wariacyjnym w ogóle (łacińskie *vario*  $\simeq$  zmienia) piszemy w tym numerze *Delty*.

Potem to już był pocałunek raczej niż uścisk. Zaczęło się od nieśmiałej próby, podjętej przez Godfrieda Wilhelma Leibniza (1646–1716), wprowadzenia pojęcia działania – wielkości, która w mechanice grałaby tę samą rolę co czas w zasadzie Fermata, a więc w obrębie optyki. Ostatecznie sformułowanie zasady najmniejszego działania (najważniejszej z zasad wariacyjnych) pochodzi od Józefa Ludwika Lagrange'a (1736–1813). Krzysztof Meissner pisze obszerniej o tej zasadzie na innych stronach *Delty*, omawiając zwłaszcza, jak z jej punktu widzenia wygląda relacja między mechaniką kwantową a klasyczną. W tych odległych czasach mechaniki kwantowej nie znano, wyrażano natomiast przypuszczenie, że przyroda dąży do osiągnięcia założonego celu, a celem tym miało być osiąganie najmniejszej wartości przez działanie, będące całką z funkcji zwanej obecnie lagranżjanem. To, że filozofia, która historycznie legła u podstaw zasady najmniejszego działania, jest raczej niepoprawna, wymaga szerszego uzasadnienia – będą Państwo mieli okazję przeczytać o tym w jednym z kolejnych zesztytów *Delty* w artykule Stanisława Bażańskiego.

Warto nadmienić, że zasada najmniejszego działania pracuje (zostawmy na boku filozofię!) nie tylko w mechanice, ale także w teorii pola (a więc np. w elektrodynamice). Z faktu tego nie zdawał sobie sprawy Albert Einstein, kiedy z mozołem, przez prawie dziesięć lat, wyprowadzał relatywistyczne równania pola grawitacyjnego. W 1915 roku prawie równocześnie z Einsteinem, opierając się na zasadzie najmniejszego działania i poświęcając zagadnieniu czas zaniedbywalnie mały w porównaniu z Einsteinowskim, równania te otrzymał Dawid Hilbert. To był jeden z najnamiętniejszych pocałunków, jakie fizyka otrzymała od zasad wariacyjnych.

Ale 3 lata później wydarzyła się rzecz o jeszcze większym znaczeniu: Emma Noether sformułowała twierdzenie o związku symetrii lagranżjanu z prawami zachowania. U Noether chodzi o przekształcenia, którym podlegają zmienne niezależne (tj. argumenty)  $x$  i zmienne zależne (tj. funkcje tych argumentów)  $y$ , które wraz z pochodnymi zmiennych zależnych względem niezależnych  $\partial y/\partial x$  stanowią pełny zestaw argumentów lagranżjanu. Istotne są przy tym tylko te przekształcenia, które dadzą się wzajemnie w gładki sposób połączyć. Jeśli mamy do czynienia z  $n$ -parametrową grupą Liego przekształceń, które nie zmieniają lagranżjanu (tzn. są jego symetriami), to w teorii opisanej tym lagranżjanem występuje  $n$ -parametrowy zespół praw zachowania. Na przykład, gdy przesunięcia w czasie są symetriami lagranżjanu, to wtedy w teorii obowiązuje prawo zachowania energii. Może też się zdarzyć, że symetrie lagranżjanu zamiast od dowolnych parametrów zależą od dowolnych funkcji – wtedy zamiast praw zachowania pojawiają się w teorii tożsamości różniczkowe, zwane tożsamościami Bianchiego. Taki przypadek zachodzi w teorii Einsteina, w której tożsamości te istotnie pochodzą od tego włoskiego geometry. Nie powinno więc dziwić, że Einstein pośrednio uznał wyższość metod wariacyjnych nad swymi własnymi, „chałupniczymi”, pisząc do *New York Timesa* w roku 1935 po śmierci autorki twierdzenia: *Zdaniem najbardziej kompetentnych z żyjących matematyków Fraülein Noether jest najznamienszym umysłem matematycznym, jaki pojawił się, odkąd kobiety uzyskały dostęp do wyższego wykształcenia.*

Obecnie stworzyć teorię fizyczną to przede wszystkim rozważyć jej symetrie (a może supersymetrie?) i podać lagranżjan niezmienniczy względem tych symetrii. Oczywiście, dla twórcy nie jest to koniec pracy nad teorią, ale i tak bardzo dużo. Zaiste, rendez-vous trwa, i staje się coraz bardziej interesujące.

