Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 1998

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 347 (WT=1,38) i 348 (WT=2,33) z numeru 10/1997

Maciej Mostowski	– Warszawa	40,10
Witold Bednarek	– Łódź	31,89
Piotr Kumor	– Olsztyn	31,20
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	30,88

Zadania z matematyki nr 363, 364

Redaguje Marcin E. KUCZMA

363. Punkty P i Q leżą odpowiednio na płaszczyznach zawierających ściany BCD i CDA czworościanu foremnego $ABCD$. Dowieść, że z odcinków AP, PQ i QB można zbudować trójkąt.

364. Niech $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$ (w określeniu liczby a_n symbol pierwiastka kwadratowego występuje n-krotnie). Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \cdot \sqrt{2-a_n}$.

Zadanie 364 zaproponował pan Janusz Wojtal z Legionowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1998

Przypominamy treść zadań:

355. Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych (p,x,y), w których p jest liczbą pierwszą, spełniające równanie $p^x - y^p = 1$.

356. Dana jest liczba naturalna n oraz trójkąt ABC, którego kąty są znane ($\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$). Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC, przy czym $|AD| = \frac{1}{n+1}\cdot|AB|$, $|AE| = \frac{1}{n+1}\cdot|AC|$. Punkty $P_1,\ldots,P_n$ leżą na boku BC, przy czym $|BP_1| = |P_1P_2| = \ldots = |P_{n-1}P_n| = |P_nC| = \frac{1}{n+1}\cdot|BC|$. Obliczyć sumę

$$|\angle DP_1E| + |\angle DP_2E| + \ldots + |\angle DP_nE|.$$

355. Przypuśćmy, że liczby p, x, y spełniają podane warunki i że p jest liczbą pierwszą nieparzystą. Liczba $p^x = y^p + 1$ dzieli się wówczas przez $y+1$; istnieje więc liczba całkowita $n \ge 1$, taka, że $y+1 = p^n$. W takim razie

$$p^x = y^p + 1 = (p^n-1)^p + 1 =$$

$$= \binom{p}{0}p^{np} + \sum_{k=1}^{p-3}\binom{p}{k}p^{n(p-k)}(-1)^k - \binom{p}{p-2}p^{2n} + \binom{p}{p-1}p^n$$

(gdy $p=3$, „pusta” suma $\sum\limits_{k=1}^{p-3}$ ma wartość zero). Współczynniki $\binom{p}{k}$ są podzielne przez p, gdy $0<k<p$; otrzymujemy równość

$$p^x = p^{np} + A\cdot p^{3n+1} - \frac{p(p-1)}{2}\cdot p^{2n} + p\cdot p^n$$

dla pewnej liczby całkowitej A. W każdym z pierwszych trzech składników po prawej stronie liczba p występuje w potędze wyższej niż $n+1$. Wobec tego $x = n+1$; otrzymana przed chwilą równość przybiera (po podzieleniu przez p^{n+1} i odjęciu stronami jedynki) postać

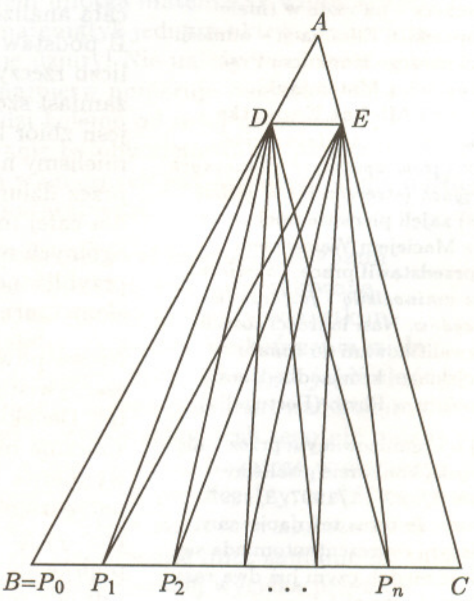
$$0 = p^{np-n-1} + A\cdot p^{2n} - \frac{p-1}{2}\cdot p^n$$

– to zaś jest możliwe tylko wtedy, gdy wykładniki $np-n-1$ oraz n są równe, czyli gdy $n(p-2)=1$, czyli dla $p=3$, $n=1$. Wówczas $x=2$, $y=2$.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy $p=2$. Wtedy trójki $(p,x,y) = (3,2,2)$ oraz $(2,1,1)$ spełniają zadane równanie i stanowią jego pełne rozwiązanie. $2^x - 1 = y^2 \equiv 1 \pmod 4$, skąd $x=1$, $y=1$.

356. Przyjmijmy $P_0 = B$. Każdy z czworokątów $P_{i-1}DEP_i$ jest równoległobokiem; zatem $|\angle DP_iE| = |\angle P_{i-1}DP_i|$, a więc rozważana suma jest równa

$$|\angle P_0DP_1| + |\angle P_1DP_2| + \ldots + |\angle P_{n-1}DP_n| = |\angle P_0DP_n| = = |\angle BAC| = \alpha.$$



Zadania z fizyki nr 260, 261

Redaguje Jerzy B. BROJAN

260. Filtr polaryzacyjny przepuszcza 85% światła spolaryzowanego wzdłuż jednej osi, a drugiej składowej nie przepuszcza w ogóle. Jeżeli na zestaw takich filtrów pada światło spolaryzowane liniowo, to ile ich trzeba wziąć i jak je ustawić, aby wiązka przechodząca miała płaszczyznę polaryzacji obróconą o 90° i maksymalne natężenie?

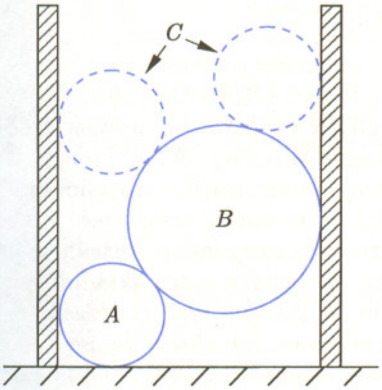
261. W długiej rurze o stałym przekroju znajduje się gaz pod ciśnieniem 10^5 Pa, którego temperatura zmienia się liniowo od 0°C na jednym końcu rury do 200°C na drugim końcu. Ile będzie wynosiło ciśnienie w rurze, jeżeli zamkniemy ją szczelnie i doprowadzimy gaz do jednakowej temperatury 100°C?

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 1998

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1998

Przypominamy treść zadań:

252. Jednorodny wydrążony walec o wewnętrznym promieniu c i zewnętrznym d stoi na poziomej powierzchni, a do jego środka włożono dwie gładkie kule A i B o masach m_A i m_B oraz promieniach a i b, przy czym $a < b$, $c < a + b$.
a) Obliczyć minimalną masę walca, przy której się on nie przewróci.
b) Do walca włożono trzecią kulę C, identyczną z A. Biorąc pod uwagę oba możliwe położenia tej kuli (zob. rysunek; dla uproszczenia można założyć, że A i C się nie zetkną), obliczyć minimalną masę walca m, przy której się on nie przewróci.



253. Przyjmijmy, że gaz jest doskonały (ściśle spełnia równanie $pV = nRT$), a jego ciepło molowe w stałej objętości C_V jest równe $(3/2)R$ poniżej pewnej nieznanej temperatury T' i $(5/2)R$ powyżej tej temperatury. Stwierdzono, że gdy rozpoczynając od pewnej objętości V_0 i ciśnienia p_0 ogrzano ten gaz izochorycznie zwiększając ciśnienie do $3p_0$, po czym rozprężono adiabatycznie do początkowej wartości ciśnienia, objętość okazała się równa $2V_0$; powracając do punktu początkowego na drodze przemiany izobarycznej zamykamy cykl. Obliczyć sprawność tego cyklu (podać wartość liczbową).

252. a) Odcinek łączący środki kul A i B jest nachylony do poziomu pod kątem α, który można obliczyć z warunku $2c = a + b + (a + b)\cos\alpha$. Siłę oddziaływania kul na siebie F_{AB} wyznaczymy z warunku równowagi kuli B – otrzymujemy $F_{AB} = m_B g/\sin\alpha$. Pozioma składowa tej siły wynosi $F_{AB}\cos\alpha = m_B g \operatorname{ctg}\alpha$ i jest równa sile oddziaływania każdej z kul na ściankę walca. Mnożąc tę wielkość przez ramię $(a + b)\sin\alpha$ znajdujemy moment pary sił $M = m_B g(a + b)\cos\alpha = m_B g(2c - a - b)$. Aby walec się nie przewrócił, ciężar walca i reakcja podłoża muszą utworzyć parę o przeciwnym momencie – stąd wyznaczamy $m_{\min} = m_B(2c - a - b)/d$.

b) Gdy kula C oprze się o ściankę po tej samej stronie co A, odcinek łączący środki C i B będzie nachylony do poziomu pod tym samym kątem α, co poprzednio, a siła oddziaływania kuli C na ściankę wyniesie $F_C = m_A g \operatorname{ctg}\alpha$. Dalsze obliczenia wykazują, że siła oddziaływania A na ściankę wzrośnie w porównaniu z poprzednim przypadkiem o tę samą wielkość F_C, a siła oddziaływania B na ściankę – o $2F_C$. Zatem moment M i wartość $m_{\min}$ pozostaną nie zmienione.

Gdy kula C oprze się o ściankę po stronie przeciwnej do A, odcinek łączący środki C i B będzie nachylony do poziomu pod kątem β, którego cosinus jest równy $\cos\beta = (b - a)(b + a)$. Obliczamy siły nacisku na ścianki: $F_C = m_A g \operatorname{ctg}\beta$, $F_A = (m_A + m_B)g \operatorname{ctg}\alpha$, $F_B = F_A - F_C$. Moment tych sił wynosi $M = F_C(a + b)\sin\beta + F_A(a + b)\sin\alpha$, zatem $m_{\min} = m_A(b - a)/d + (m_A + m_B)(2c - a - b)/d$.

253. Przemianę adiabatyczną gazu doskonałego opisuje równanie Poissona, które w zmiennych p i T ma postać $T^\sigma/p = \text{const}$, gdzie parametr $\sigma = C_p/R = 1 + C_V/R$ ma wartość $\sigma_1 = 5/2$, gdy $C_V = (3/2)R$, a $\sigma_2 = 7/2$, gdy $C_V = (5/2)R$. Nietrudno sprawdzić, że nachylenie adiabaty przedstawionej w zadaniu odpowiada parametrowi σ o wartości pośredniej między σ_1 a σ_2, co oznacza, że musi się ona składać z dwóch segmentów, na których obowiązują równania $T^{\sigma_1}/p = \text{const}$ i $T^{\sigma_2}/p = \text{const}$. Zatem

$$\frac{(3T_0)^{7/2}}{3p_0} = \frac{(T')^{7/2}}{p'}, \qquad \frac{(T')^{5/2}}{p'} = \frac{(2T_0)^{5/2}}{p_0},$$

gdzie T_0 jest temperaturą początkową, a parametry p' i T' odnoszą się do punktu zszycia segmentów. Znajdujemy $T' = T_0(3/2)^{5/2}$, a dalej

$$Q_{\text{izochor}} = \frac{3}{2}R(T' - T_0) + \frac{5}{2}R(3T_0 - T') = RT_0\left(6 - (3/2)^{5/2}\right),$$

$$Q_{\text{izobar}} = \frac{5}{2}R(2T_0 - T_0) = \frac{5}{2}RT_0,$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\text{izobar}}}{Q_{\text{izochor}}} = 0{,}229.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 248 (WT=1,75) i 249 (WT=2,88) z numeru 12/1997

Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	42,92
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	32,09
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	18,68
Tomasz Wietecha	– Tarnów	15,39
Marek Wójcicki	– Szczecin	11,72
Aleksander Surma	– Myszków	11,08

Rozwiązanie zadania M 847.
Podstawiając w rozpatrywanym równaniu $x = y = 0$ otrzymujemy $f(0) = 0$. Następnie, kładąc $y = -x$, dostajemy $f(-x) = -f(x)$. Niech $f(1) = a$. Przez łatwą indukcję dowodzimy, że wzór $f(nx) = nf(x)$ jest słuszny dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ i wszystkich całkowitych n. Zatem $f(n) = na$ dla $n \in \mathbf{Z}$.

Wreszcie, dla $p, q \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ mamy $f(p/q) = (1/q)(qf(p/q)) = (1/q)f(p) = (p/q)a$. Udowodniliśmy więc wzór $f(x) = xa$ dla wszystkich $x \in \mathbf{Q}$. Ponieważ każdą liczbę rzeczywistą można przybliżać liczbami wymiernymi, a f jest funkcją ciągłą, więc wzór ten zachodzi dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$. Ostatecznie, jedynymi funkcjami ciągłymi spełniającymi rozpatrywane równanie funkcyjne są funkcje liniowe postaci $f(x) = ax$.