O sile Coriolisa i grawitacji

Ewa CZUCHRY i Wojciech KOPCZYŃSKI

W podstawowych prawach fizyki Newtona masa występuje w dwóch rolach. Po pierwsze, jako tzw. masa bezwładnościowa m_I po lewej stronie II prawa dynamiki, $m_\mathrm{I}\vec{a} = \vec{F}$. Po drugie, jako tzw. masa ciężka m_G we wzorze na siłę grawitacyjną, $\vec{F}_\mathrm{graw} = m_\mathrm{G}\vec{g}$, gdzie $\vec{g}$ jest natężeniem pola grawitacyjnego. Równość $m_\mathrm{I} = m_\mathrm{G}$ jest faktem doświadczalnym, na który po raz pierwszy zwrócił uwagę Ioannes Grammaticus w V wieku, a lista badaczy zawiera tu tak świetne nazwiska, jak Galileusz, Newton, Eötvös, Dicke i Braginski – ten ostatni wykazał równość tych mas (w skali astronomicznej) z dokładnością 2×10^{-12}. Kilkanaście lat temu zakwestionowano wyniki doświadczeń barona Eötvösa i wyrażono przypuszczenie, że zwykłej, proporcjonalnej do m_I sile grawitacyjnej towarzyszy tzw. piąta siła (o domniemanym zasięgu około 200 m) zależna od składu chemicznego ciała. Wywołało to lawinę prac doświadczalnych. Wyniki ich prowadziły do rozbieżnych wniosków, ale ostatecznie nie uznano doświadczalnego dowodu istnienia piątej siły.

Nieporozumieniem jest nazywanie piątą siłą (w skądinąd świetnym artykule w *Gazecie Wyborczej* z 27 lutego 1997) siły związanej z istnieniem różnej od zera stałej kosmologicznej (*Delta* 4/1998). Wprowadzenie do równań Einsteina członu kosmologicznego jest dla einsteinowskiej teorii grawitacji jedyną modyfikacją, która nie narusza istotnie jej struktury. Przeto siła związana z istnieniem stałej kosmologicznej jest częścią składową siły grawitacyjnej (choć Einstein wyparł się tej stałej pod koniec życia).

Jeżeli zgodzimy się z tym, że masa ciężka równa jest bezwładnościowej, $m_\mathrm{G} = m_\mathrm{I} =$ (po prostu) m, to w prawie – zapisanym w inercjalnym układzie odniesienia – ruchu ciała, znajdującego się pod wyłącznym wpływem siły grawitacyjnej, masa w ogóle nie wystąpi, $\vec{a} = \vec{g}$ (nie wystąpi ona także w tym samym prawie ruchu, ale zapisanym w nieinercjalnym układzie odniesienia). Nie do końca potrafimy wskazać układ odniesienia, który jest inercjalny, ale – koncentrując się na układach związanych z Ziemią – wiemy, że jeśli już, to inercjalny jest raczej ten, w którym Ziemia kręci się z okresem 24 godzin, niż ten, w którym Ziemia spoczywa. W pierwszym układzie potrafimy bez kłopotu objaśnić, na czym polega ruch ciała puszczonego swobodnie z wysokiej wieży. Mianowicie na skutek tego, że liniowa prędkość wierzchołka wieży, spowodowana obrotem kuli ziemskiej, jest większa niż liniowa prędkość podstawy wieży, ciało upadnie nieco na wschód od niej. No dobrze, ale jak objaśnić to samo zjawisko w nieinercjalnym układzie odniesienia związanym sztywno z Ziemią? Przecież w tym układzie wieża się nie porusza.

W uniwersyteckich podręcznikach mechaniki dokonuje się przeliczenia przyspieszenia ciała w jednym układzie odniesienia do drugiego układu, który porusza się dowolnym ruchem względem pierwszego. Wyniki tego przeliczenia możemy zastosować do przypadku, gdy pierwszym układem odniesienia U jest układ inercjalny, a drugim U' jest układ Ziemi:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_\mathrm{tr} - \omega^2\vec{r}\,'_\perp + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'.$$

Pierwszy człon w powyższym wzorze stanowi przyspieszenie w układzie U'. Drugi człon jest *przyspieszeniem translacyjnym*, czyli przyspieszeniem początku układu U' względem U. Trzeci człon jest *przyspieszeniem dośrodkowym*; $\vec{\omega}$ jest wektorem prędkości kątowej układu U' względem U, $\vec{r}\,'$ jest promieniem wodzącym ciała w układzie U', natomiast $\vec{r}\,'_\perp$ jego składową prostopadłą do $\vec{\omega}$. Czwarty człon nie ma swojej nazwy. Wreszcie piąty człon, w którym występuje prędkość $\vec{v}\,'$ ciała względem układu U', nosi nazwę *przyspieszenia Coriolisa*. Zatem w nieinercjalnym układzie Ziemi prawo (równanie) ruchu ciała w polu grawitacyjnym wygląda tak:

$$\vec{a}\,' = \vec{g}_\mathrm{ef} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,',$$

przy czym wszystkie człony niezależne od prędkości $\vec{v}\,'$ włączyliśmy do *efektywnego przyspieszenia grawitacyjnego*

$$\vec{g}_\mathrm{ef} = \vec{g} - \vec{a}_\mathrm{tr} + \omega^2\vec{r}\,'_\perp - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,'.$$

Włączenie wszystkich tych członów do $\vec{g}_\mathrm{ef}$ nie jest zabiegiem li tylko formalnym, ale wyraża spostrzeżenie, że doświadczalnie nie jesteśmy w stanie rozróżnić poszczególnych składników efektywnego przyspieszenia grawitacyjnego – obserwowaną siłą grawitacyjną jest $m\vec{g}_\mathrm{ef}$. *Siłę Coriolisa* $\vec{F}_\mathrm{C} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$ jesteśmy w stanie odróżnić od grawitacyjnej, używając do tego celu ciał o rozmaitych prędkościach.

Człony drugi, trzeci i czwarty, występujące we wzorze na $\vec{g}_\mathrm{ef}$, na powierzchni Ziemi, nieznacznie tylko modyfikują wkład pochodzący od członu pierwszego. Wielkość członu drugiego (czyli przyspieszenia translacyjnego ze znakiem minus) możemy obliczyć, przyjmując układ Słońca za inercjalny. Wielkość przyspieszenia dośrodkowego ruchu Ziemi wokół Słońca, pełniącego tu rolę przyspieszenia translacyjnego, wynosi 6×10^{-3} m/s^2; ale odpowiadająca temu przyspieszeniu *translacyjna siła bezwładności* znosi się niemal dokładnie z siłą odsłonecznej grawitacji („niemal" ma tu pewne znaczenie dla powstawania pływów oceanicznych), można więc człon drugi pominąć. Znacznie mniejszy jest wkład członu czwartego; zmiany wektora prędkości kątowej, spowodowane przemieszczaniem się bieguna kinematycznego Ziemi względem niej samej, dają wkład rzędu 10^{-10} m/s^2; zmiany wywołane precesją osi ziemskiej z okresem 25 700 lat i systematycznym zmniejszaniem się długości wektora prędkości kątowej dają wkłady rzędu $10^{-15}\ \mathrm{m/s^2}$. Naprawdę istotny jest tylko człon trzeci, przyspieszenie odśrodkowe daje wkład zależny od szerokości geograficznej; na biegunie wynosi on 0, by na równiku osiągnąć wartość $3{,}3 \times 10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}$. To ono powoduje, że Ziemia jest spłaszczona na biegunach, gdyż zastygła w zamierzchłych epokach w takiej formie, by uśrednione w czasie $\vec{g}_{\mathrm{ef}}$ było wszędzie prostopadłe do jej powierzchni (powierzchnię o tej własności zwiemy *geoidą*). Wektor $\vec{g}_{\mathrm{ef}}$ wyznacza więc kierunek pionu, prostopadły do powierzchni Ziemi, o ile pominąć odchylenia tego wektora od wartości średniej w czasie oraz istnienie gór.

Siłę Coriolisa nie tylko można odróżnić od grawitacyjnej, ale ma ona na ogół składową poziomą. Gdy prędkość ciała jest pozioma, $\vec{v}\,' \perp \vec{g}_{\mathrm{ef}}$, wtedy siła Coriolisa rozkłada się na składową poziomą i pionową następująco: $\vec{F}_{\mathrm{C}} = \vec{F}_{\mathrm{C}\perp} + \vec{F}_{\mathrm{C}\parallel}$, przy czym $\vec{F}_{\mathrm{C}\perp} = -2\vec{\omega}_{\parallel} \times \vec{v}\,'$ i $\vec{F}_{\mathrm{C}\parallel} = -2\vec{\omega}_{\perp} \times \vec{v}\,'$, a $\vec{\omega}_{\parallel}$ i $\vec{\omega}_{\perp}$ są odpowiednio składową pionową i poziomą predkości kątowej Ziemi w danym miejscu jej powierzchni. Składowa pozioma siły Coriolisa jest na półkuli północnej zwrócona na prawo od zwrotu prędkości, na półkuli południowej zaś na lewo; jej wartość, jeśli pominąć spłaszczenie Ziemi na biegunach, wynosi $\left|\vec{F}_{\mathrm{C}\perp}\right| = 2\omega v' \sin\phi$, gdzie ϕ jest szerokością geograficzną. Składowa pionowa siły Coriolisa jest zwrócona w górę, gdy prędkość $\vec{v}\,'$ jest zwrócona na wschód, w dół zaś, gdy prędkość jest zwrócona na zachód; jej wartość wynosi $\left|\vec{F}_{\mathrm{C}\parallel}\right| = 2\omega v' \sin\chi$, gdzie χ jest kątem, jaki tworzy kierunek ruchu z południkiem.

Efekt Coriolisa obserwujemy przede wszystkim w ruchach wielkich mas powietrza i wody. Wielkie, tzw. planetarne wiatry, jak pasaty na szerokościach podzwrotnikowych, czy wiatry zachodnie na średnich szerokościach geograficznych nie mają kierunku południkowego, lecz ulegają odchyleniu. Na półkuli północnej pasaty, przenoszące powietrze znad zwrotnikowych obszarów wyżu atmosferycznego do równikowej strefy niżu, mają kierunek północnowschodni, na półkuli południowej zaś południowowschodni. Ruch wiatrów zachodnich może stać się niestabilny i spowodować stworzenie cyklonów (bądź antycyklonów), charakterystycznych dla średnich szerokości geograficznych. Centrum cyklonu stanowi obszar bardzo niskiego ciśnienia, do niego napływają masy powietrza z obszarów o większym ciśnieniu. Siła Coriolisa powoduje odchylenie kierunku tego ruchu w prawo na półkuli północnej, lub w lewo na południowej. Stąd bierze się charakterystyczna rotacja dookoła centrum cyklonu: w stronę przeciwną kierunkowi ruchu wskazówek zegara na półkuli północnej i zgodną na południowej.

Typowym przykładem odchylenia ruchu wielkich mas wody jest Prąd Zatokowy (Golfsztrom), ciepły prąd wypływający znad równika w okolicach Indii Zachodnich, opływający wschodni brzeg Ameryki Północnej, żeby ją opuścić – na skutek działania siły Coriolisa – koło Florydy i kierując sie na północny wschód, ogrzać od zachodu Europę.

Siła Coriolisa odgrywa też istotną rolę w wojskowości. Podczas bitwy morskiej koło Falklandów, będącej fragmentem I wojny światowej, brytyjscy artylerzyści ze zdziwieniem stwierdzili, że ich pociski trafiają około stu jardów na lewo od niemieckich okrętów. Nie było to spowodowane tym, że konstruktorzy celowników nie uwzględnili efektu Coriolisa. Wręcz przeciwnie, uwzględnili, lecz nie wzięli pod uwagę, że bitwy mogą się odbywać na 50° stopniu szerokości geograficznej południowej, zamiast północnej. Obserwowane odchylenie pocisków było więc podwojonym wynikiem działania siły Coriolisa (dla tej szerokości geograficznej).

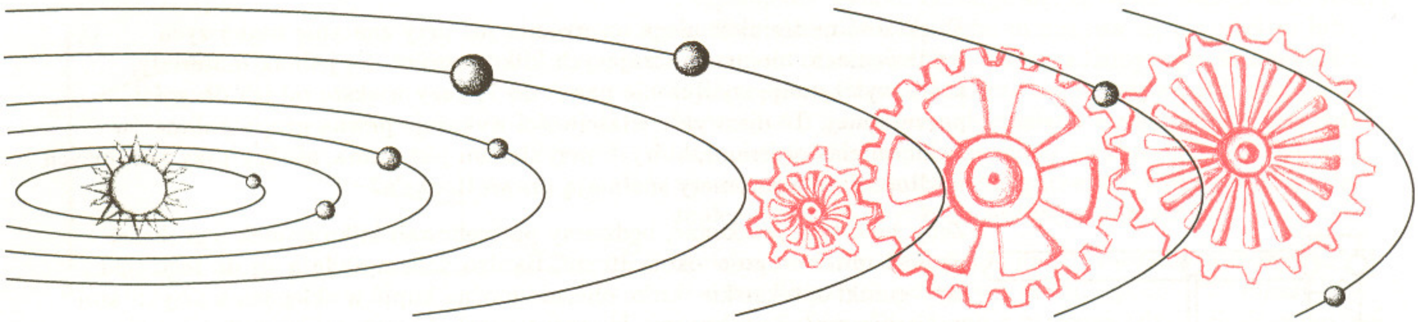
Siły Coriolisa nie można włączyć do siły grawitacyjnej z uwagi na jej zależność od prędkości ciała. Ale uwaga ta dotyczy tylko takiego opisu tych sił, w którym oddzielnie traktujemy przestrzeń i czas. Stosując opis czasoprzestrzenny, czteroelementowy ciąg (t, x, y, z) zapisujemy jako (x^{μ}), przy czym umawiamy się, że wskaźniki $\mu, \nu, \ldots$ przebiegają wartości $0, 1, 2, 3$. Wtedy równanie ruchu pod wyłącznym wpływem pola grawitacyjnego w dowolnym (inercjalnym bądź nieinercjalnym) układzie odniesienia możemy zapisać jako

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\rho} = 0;$$

zastosowaliśmy przy tym konwencję sumacyjną Einsteina: w wyrażeniach jednomianowych sumujemy względem wskaźnika, który występuje raz u dołu i raz u góry, mimo że znaku Σ explicite nie wypisujemy. W inercjalnym układzie odniesienia różne od zera są tylko te składowe $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}$, które są postaci $\Gamma^{i}{}_{00} = -g^{i}$ (gdzie $i, j, \ldots = 1, 2, 3$), a więc reprezentujące natężenie właściwego pola grawitacyjnego $\vec{g}$. W nieinercjalnym układzie odniesienia, oprócz składowych tej postaci (reprezentujących tym razem $\vec{g}_{\mathrm{ef}}$), pojawiają się składowe postaci $\Gamma^{i}{}_{0j}$ lub $\Gamma^{i}{}_{j0}$, reprezentujące siłę Coriolisa. Przy założeniu, że współczynniki Γ są symetryczne, $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}$, wszystkie one są jednoznacznie wyznaczone przez pole grawitacyjne i układ odniesienia.

W przestrzeni euklidesowej równanie powyższej postaci opisuje proste – w dowolnym układzie współrzędnych (ale w szczególnej, tzw. afinicznej parametryzacji). Rozsądnie więc jest powyższe równanie czasoprzestrzenne nazywać równaniem *linii najprostszych* (autoparaleli), zwłaszcza że obowiązuje ono także w dowolnym układzie współrzędnych w czasoprzestrzeni (przy czym parametrem, względem którego różniczkujemy, jest czas absolutny t, który nie musi być jedną ze współrzędnych wybranego układu). Linie najprostsze nie są tu prostymi, bo w nietrywialnym polu grawitacyjnym nie istnieje układ współrzędnych czasoprzestrzennych, w którym znikają współczynniki Γ, a to znaczy, że czasoprzestrzeń jest zakrzywiona.

To, że Newtonowskie równanie ruchu w polu grawitacyjnym jest równaniem linii najprostszych, odkrył Élie Cartan w latach dwudziestych XX wieku, a więc już po stworzeniu relatywistycznej teorii grawitacji. Czy można się dziwić, że najpierw stworzono trudniejszą teorię relatywistyczną – od razu w postaci geometrycznej, a dopiero później zgeometryzowano łatwiejszą teorię przedrelatywistyczną? Nie, dlatego że Einstein, tworząc ogólną teorię względności, bazował na geometrii Riemanna, w której pojęcie linii najprostszych zlewa się z pojęciem *linii najkrótszych* (geodezyjnych). Niezależne pojęcie linii najprostszych nie istniało i trzeba było jeszcze długiego czasu, by przyznano mu pełnię „praw obywatelskich". W czasoprzestrzeni Newtona–Cartana, w której można zgeometryzować grawitację Newtona, nie udaje się w żaden sensowny sposób wprowadzić metryki, a zatem pytania, czym są geodezyjne, nie można postawić.



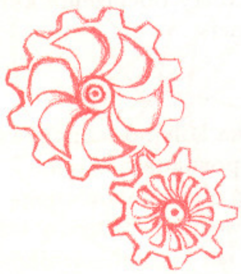
Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 856. Niech n będzie liczbą parzystą. Udowodnić, że istnieją takie wielomiany $f(x)$, $g(x)$ stopnia co najmniej 1, o współczynnikach całkowitych, że $x^{2n} + x^{2n-2} + x^{2n-4} + \ldots + x^2 + 1 = f(x)g(x)$.
Rozwiązanie na str. 13

M 857. Czy istnieją takie wielomiany $f(x)$ i $g(x)$ stopnia co najmniej 1, o współczynnikach całkowitych, że $x^{10} + x^5 + 1 = f(x)g(x)$?
Rozwiązanie na str. 13

M 858. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n wielomian $(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$ jest podzielny przez $x^2 + x + 1$.
Rozwiązanie na str. 13



Redaguje Ewa CZUCHRY

F 483. W świeżo odnalezionych fragmentach Czerwonej Księgi Marchii Zachodniej znajduje się wzmianka, że Sauron skonstruował samobieżną machinę, poruszającą się ze stałą prędkością 1 km/h i mającą siłę ognia większą niż wszystko, co znane było ludziom Śródziemia. Machina ta mogłaby zmienić wynik bitwy na Polach Pelennoru, gdyby nie to, że Sauron (słabiej znający fizykę niż metalurgię) nie wyposażył jej w żadne urządzenie zapobiegające dryfowi, lecz przeciwnie, postarał się o zlikwidowanie wszelkich oporów bocznych. Machinę uruchomiono zaraz na początku bitwy o Pelennor, gdy nie było wiatru. Mimo to machina nie odniosła sukcesu – dlaczego? Znaleźć ruch machiny, zakładając, że Pelennor leży na północnej szerokości geograficznej $\phi = 50°$, a tolkienowską planetą jest Ziemia.
Rozwiązanie na str. 2

F 484. Na szerokości geograficznej $\phi = 50°$ płynie z południa na północ rzeka z prędkością $v = 5$ km/h. Na pewnym odcinku swego biegu skręca ona trochę w kierunku zachodnim. Dla jakiego promienia krzywizny zakola rzeki składowa pozioma siły Coriolisa, wywołana ruchem obrotowym Ziemi, będzie większa od siły odśrodkowej, związanej z zakolem rzeki?
Rozwiązanie na str. 2