1/99 (13)

Γ $\lim_{n\to\infty}$ atias

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (12)

Ambroży proponuje Bazylemu następującą grę:
– Za rozgrywkę płacisz mi na początku 2 złote. Następnie rzucasz kostką do gry, i jeśli nie wyrzucisz szóstki, ja płacę ci tyle złotych, ile oczek wypadło.
– A jeśli wyrzucę szóstkę?
– Powtarzamy rozgrywkę od początku z dziesięciokrotną stawką.
– To znaczy, że do tych 2 złotych muszę ci dołożyć 20?
– Tak, ale ja ci zapłacę 10 złotych za każde oczko wyrzucone w drugim rzucie.
– A jak znowu będzie szóstka?
– To znowu zdziesięciokrotniamy stawkę i zaczynamy od początku.
– Zaraz, zaraz. To po dwóch szóstkach jestem 222 złote do tyłu?
– Niezupełnie. Ja ci zapłacę 100 złotych za każde oczko wyrzucone w trzecim rzucie. O ile oczywiście nie wyrzucisz trzeciej szóstki, bo wtedy gra toczy się dalej...
– Wiem, wiem.
– To co, grasz?
– Muszę to sobie przekalkulować. Jeśli $w$ jest wartością oczekiwaną mojej wygranej, to

$$w=-2+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{10w}{6},$$

skąd $w=-0{,}75$, czyli na każdej rozgrywce stracę średnio 75 groszy. Oj Ambroży, Ambroży. Od razu podejrzewałem, że chcesz mnie naciągnąć.
– Co ty, Bazyli? Ja ciebie? Chciałem tylko pograć. Możemy zmienić zasady na twoją korzyść.
– Jak?
– Zamiast 2 złote za rozgrywkę, będziesz mi płacił 3 złote.
– Co ty? Wariata ze mnie robisz? To mi się jeszcze mniej opłaca.
– Przelicz!
– A co tu liczyć? Przy 2 złotych opłaty traciłem 75 groszy, a jak mam więcej płacić, to stracę jeszcze więcej.
– Przelicz!
– Ale...
– Przelicz!
– No dobra, dobra. Zaraz ci wyliczę, na ile chciałeś mnie naciągnąć. W poprzednim wzorze zmieniamy $-2$ na $-3$ i wychodzi... wychodzi... eee... jeszcze sprawdzę... wychodzi, że średnio wygram od ciebie 75 groszy w każdej rozgrywce...

*JWR*

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (13)

TWIERDZENIE: Jeżeli $f$ jest klasy $C^1(\mathbb{R})$ oraz $f(0)=0$, to

$$(\diamondsuit)\qquad f(1)=f'(1).$$

*Dowód:* Z twierdzenia Lagrange'a, zastosowanego do przedziału $(0,x)$, mamy

$$(\clubsuit)\qquad \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=f'(c),$$

skąd

$$(\spadesuit)\qquad f(x)=xf'(c).$$

Różniczkując równość ($\spadesuit$) względem $x$, otrzymujemy

$$(\heartsuit)\qquad f'(x)=f'(c).$$

Połączenie ($\clubsuit$) i ($\heartsuit$) daje $\frac{f(x)}{x}=f'(x)$, skąd po podstawieniu $x=1$ otrzymujemy ($\diamondsuit$).

*JWR*

## PISZEMY PRACE (1)

Rubryka adresowana jest do uczniów. Wyniki uzyskane w najlepszych pracach zostaną omówione w Gammalimatiasie. Najlepsze prace wezmą udział w **Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki**.

### TOŻSAMOŚCI W TRÓJKĄCIE PASCALA

Jakie znacie tożsamości używające wyrazów trójkąta Pascala? Na pewno następujące:

$$(1)\qquad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

$$(2)\qquad \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$(3)\qquad \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

$$(4)\qquad \binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\ldots+\binom{n}{n}y^n=(x+y)^n$$

Równość (1) leży u podstaw dowodów indukcyjnych ciekawych tożsamości (jak np. (2) i (3)), podczas gdy (4) może być użyte do nieco sprytniejszych rozumowań. Na przykład (2) i (3) otrzymujemy z (4), biorąc $x=1$ i $y=\pm1$.

Oczywiście, na tym nie koniec. Trójkąt Pascala kryje w sobie niezliczone bogactwo rozmaitych zależności. Zadanie dla Was: wygrzebać z tego bogactwa jak najwięcej. Oto przykłady:

Czym jest $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}$ ?

**Wskazówka:** Zróżniczkuj (4) względem $x$.

Czym są $-\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}-3\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n n\binom{n}{n}$ i $\binom{n}{1}+8\binom{n}{2}+27\binom{n}{3}+\ldots+n^3\binom{n}{n}$ ?

Stosując (4), można obliczyć $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots$. Wystarczy rozważyć liczbę $\frac{1}{3}\left((1+1)^n+(1+\alpha)^n+(1+\alpha^2)^n\right)$, gdzie $\alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

A czemu jest równa suma $\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\ldots$?

Czekamy na opracowania tych i innych znalezionych przez Was tożsamości.

Prace prosimy przesyłać pod adresem Gammalimatiasu do 31 marca 1999 r. Autorów prosimy o podanie imienia, nazwiska, adresu prywatnego, klasy oraz nazwy i adresu szkoły. Prosimy o zaznaczenie, czy praca była pisana pod kierunkiem opiekuna – jeśli tak, prosimy o podanie jego imienia, nazwiska i adresu.

*JWR*

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl