4/99 (16)

Γ-limatias

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (14′)

Wyjaśnienie oszustwa (14): Nie sprawdziliśmy, czy dla znalezionych wartości parametru a rozwiązanie równania kwadratowego $x^2 + (3 - a)x + 1 = 0$ należy do dziedziny wyjściowego równania.

Dla $a = 1$ znajdujemy $x = -1$. Po wstawieniu tej wartości do równania danego w treści zadania otrzymujemy $\log_7 0 = \log_7 0$, co pokazuje, że $x = -1$ nie jest rozwiązaniem. Dla $a = 1$ równanie nie ma więc rozwiązań.

Dla $a = 5$ wszystko jest w porządku: $x = 1$, $\log_7 6 = \log_7 6$.

Zatem jedyną wartością parametru a, spełniającą warunki zadania, jest 5.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (15′)

Wyjaśnienie oszustwa (15): Błąd popełniany przez naszych bohaterów był całkiem banalny: nie mieli zwyczaju pisać nawiasów. Z tego powodu $x\log_2(2 + x) = 4$ zamieniało się od razu w $x(\log_2 2) + x = 4$. Ponieważ jednak rozwiązaniem równania było $x = 2$, a w tym przypadku $x\log_2(2 + x) = x(\log_2 2) + x$, więc ostateczny wynik wyszedł poprawny. Podobnie mamy $x\log_n(n + x) = x(\log_n n) + x = 2n(n - 1)$ dla $x = n(n - 1)$, co wyjaśnia dlaczego również w drugim równaniu (gdzie $n = 3$) Bazyli otrzymał poprawny wynik.

Natomiast w trzecim równaniu nie pojawiła się po drodze żadna tożsamość, która pozwoliłaby otrzymać poprawny wynik pomimo błędnych rachunków.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (16′)

Wyjaśnienie oszustwa (16): Twierdzenie jest fałszywe, co widać na przykładzie $a = 5$, $b = 13$, $c = 12$. Nigdzie nie było napisane, że c jest przeciwprostokątną, a takie założenie wykorzystaliśmy w dowodzie.

JWR

GRY (1)

Naszą wędrówkę po świecie gier rozpoczniemy od gry dobrze znanej, ale bardzo ważnej dla naszych dalszych rozważań. Tą grą jest *Nim*.

W *Nim* gra dwóch graczy. Na początku rozgrywki w kilku stosach układa się bierki. Liczba stosów oraz liczba bierek w poszczególnych stosach jest dowolna. Gracze wykonują ruchy na przemian. Ruch polega na zabraniu dowolnej liczby (co najmniej 1) bierek z dowolnego stosu. Można zabrać wszystkie bierki ze stosu i wtedy liczba stosów się zmniejszy. Wygrywa ten, kto zabierze wszystkie bierki z ostatniego stosu.

Zastanówmy się jaka jest strategia w tej grze. Zacznijmy od sytuacji najprostszej, a mianowicie kiedy na początku gry jest tylko jeden stos. Co robi gracz, który rozpoczyna rozgrywkę? Zabiera wszystkie bierki i wygrywa. Trochę nudna jest taka gra.

Rozpatrzmy z kolei dwa stosy. Co ma zrobić pierwszy gracz? Zlikwidowanie jednego ze stosów to samobójstwo. Chwila zastanowienia podpowiada następujące rozwiązanie. Należy zabrać bierki z tego stosu, w którym jest ich więcej, tak aby po wykonaniu ruchu liczba bierek w obu stosach była taka sama. W dalszym ciągu gry stosujemy tę samą strategię. W ten sposób zawsze będziemy podawać przeciwnikowi pozycję składającą się z dwóch stosów tej samej wielkości. Nietrudno wyobrazić sobie, że w końcu przeciwnik zostanie zmuszony do zlikwidowania jednego ze stosów, a wtedy my zlikwidujemy drugi i wygramy. A jeżeli na początku gry w obu stosach było tyle samo bierek? No cóż, nawet mając opracowaną strategię, nie zawsze się wygrywa. Robimy cokolwiek, byle gra toczyła się jak najwolniej i liczymy na błąd przeciwnika.

A co się dzieje przy trzech stosach? Tu strategia jest dalece mniej oczywista. Aby ją zgrabnie sformułować, musimy najpierw zdefiniować dodawanie dwójkowe. Mówiąc najbardziej obrazowo, dodawanie dwójkowe polega na zapisaniu liczb w układzie dwójkowym, a następnie pisemnym dodaniu ich „bez przenoszenia”.

Bardziej ściśle, dla $c_0, c_1, \ldots, c_k, d_0, d_1, \ldots, d_k \in \{0, 1\}$ definiujemy

$$\sum_{i=0}^{k} c_i 2^i +_2 \sum_{i=0}^{k} d_i 2^i = \sum_{i=0}^{k} (c_i +_2 d_i) 2^i,$$

gdzie $0 +_2 0 = 1 +_2 1 = 0$ oraz $1 +_2 0 = 0 +_2 1 = 1$.

W praktyce przy dodawaniu dwójkowym rozkładamy każdy ze składników na sumę różnych potęg dwójki, a następnie dodajemy, pamiętając, że różne potęgi dwójki dodaje się w zwykły sposób, a równe potęgi dwójki przy dodawaniu dają 0, na przykład

$$\begin{aligned}13 +_2 7 +_2 12 &= (8 + 4 + 1) +_2 (4 + 2 + 1) +_2 (8 + 4) = \\ &= 8 +_2 4 +_2 1 +_2 4 +_2 2 +_2 1 +_2 8 +_2 4 = \\ &= 8 +_2 8 +_2 4 +_2 4 +_2 4 +_2 2 +_2 1 +_2 1 = \\ &= 4 +_2 2 = 4 + 2 = 6.\end{aligned}$$

Strategia w grze *Nim* jest następująca: należy podawać przeciwnikowi pozycję, w której suma dwójkowa liczb bierek we wszystkich stosach jest równa 0. Ta strategia działa dla dowolnej liczby stosów.

O tym, jak praktycznie znajdować wygrywający ruch w grze *Nim*, mając na uwadze powyższą strategię, opowiemy szerzej w następnym Gammalimatiasie.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl