# Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 1999

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

## Zadania z matematyki nr 379, 380

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

**379.** Dla danej liczby naturalnej parzystej $n \geq 2$ znaleźć wszystkie układy liczb $(x_1, \ldots, x_n)$ spełniające warunki: $0 \leq x_i \leq 1$ dla $i = 1, \ldots, n$ oraz

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(1 - x_{i+1}) = \frac{n}{2} \qquad (\text{przyjmujemy } \ x_{n+1} = x_1).$$

**380.** Obliczyć maksymalną wartość pola trójkąta równobocznego, którego wszystkie wierzchołki leżą na brzegu prostokąta o bokach długości $a$, $b$ (dla danych liczb $a \geq b > 0$).

Zadanie **380** zaproponował pan Tadeusz Józefczyk z Poznania.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1998

Przypominamy treść zadań:

**371.** Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. Znaleźć wszystkie układy liczb rzeczywistych $(x_1, \ldots, x_n)$ spełniające warunki $x_1 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$ oraz

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\left(\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k+1}}\right) = 1;$$

w drugiej sumie przyjmujemy $x_{n+1} = 0$.

**372.** Niech $f$ będzie podobieństwem przestrzeni trójwymiarowej. Dla dowolnego zbioru $k$ zawartego w tej przestrzeni oznaczmy przez $k^*$ zbiór środków wszystkich odcinków $XX'$, gdzie $X \in k$, $X' = f(X)$. Wykazać, że jeżeli $\ell$ jest prostą, to zbiór $\ell^*$ jest zawarty w pewnej prostej oraz że jeżeli $\pi$ jest płaszczyzną, to zbiór $\pi^*$ jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.

**371.** Załóżmy, że liczby $x_1, \ldots, x_n$ (wraz z $x_{n+1} = 0$) spełniają podane warunki. Przyjmijmy: $\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k+1}} = t_k$ dla $k = 1, \ldots, n$. Zatem

$$(1) \qquad \begin{aligned} (t_1 + t_2 + \ldots + t_n)^2 &= x_1 \\ (t_2 + \ldots + t_n)^2 &= x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_n^2 &= x_n. \end{aligned}$$

Zgodnie z zadanymi równaniami,

$$(2) \qquad 1 = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} k\,t_k^2 + 2\sum_{k<\ell} k\,t_k t_\ell$$

(bowiem iloczyn $t_k t_\ell$ występuje w rozwinięciu lewych stron związków (1), przedstawiających $x_1, \ldots, x_k$, ale nie $x_{k+1}, \ldots, x_n$) – oraz

$$(3) \qquad \begin{aligned} 1 &= \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\left(\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k+1}}\right)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\, t_k\right)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\,t_k^2 + 2\sum_{k<\ell} \sqrt{k\ell}\, t_k t_\ell. \end{aligned}$$

Przyrównując prawe strony (2) i (3) dostajemy zależność

$$\sum_{k<\ell} \sqrt{k}\left(\sqrt{\ell} - \sqrt{k}\right) t_k t_\ell = 0,$$

spełnioną jedynie wówczas, gdy wszystkie liczby $t_k$, z wyjątkiem co najwyżej jednej, są zerami. Istnieje więc liczba $m \in \{1, \ldots, n\}$ taka, że $t_k = 0$ dla $k \neq m$. W myśl określenia liczb $t_k$ oraz na mocy równości (2) dostajemy wniosek, że

$$x_1 = \ldots = x_m = \frac{1}{m}, \qquad x_{m+1} = \ldots = x_n = 0.$$

Każdy układ $(x_1, \ldots, x_n)$ takiej postaci istotnie spełnia wszystkie rozważane warunki.

**372.** Ustalmy prostą $\ell$ i wybierzmy na niej dwa różne punkty $O$, $A$. Jeśli $X$ jest punktem tej prostej, to $\overrightarrow{OX} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA}$ dla pewnej liczby $\alpha \in \mathbf{R}$. Podobieństwo jest przekształceniem liniowym. Zatem obrazami punktów $O$, $A$, $X$ są punkty $O'$, $A'$, $X'$ spełniające analogiczną równość $\overrightarrow{O'X'} = \alpha \cdot \overrightarrow{O'A'}$.

Niech $M$ będzie środkiem odcinka $OO'$. Środek $Z$ odcinka $XX'$ jest wyznaczony przez zależność

$$(*) \qquad \begin{aligned} \overrightarrow{MZ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{MX'}) = \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{MO'} + \overrightarrow{O'X'}) = \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{O'X'}), \end{aligned}$$

czyli

$$\overrightarrow{MZ} = \alpha \cdot \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O'A'}) \qquad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

Punkt $Z$ leży więc na prostej przechodzącej przez punkt $M$, o wektorze kierunkowym $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O'A'})$ (a jeśli jest to wektor zerowy, wówczas punkt $Z$ pokrywa się z $M$ dla każdej liczby $\alpha \in \mathbf{R}$). W każdym przypadku zbiór $\ell^*$, złożony z możliwych położeń punktu $Z$, zawiera się w pewnej prostej.

Dla dowolnie ustalonej płaszczyzny $\pi$ rozumowanie jest analogiczne: wybieramy na niej trzy niewspółliniowe punkty $O$, $A$, $B$. Jeżeli $X \in \pi$, to $\overrightarrow{OX} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB}$ dla pewnych liczb $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$; stąd $\overrightarrow{O'X'} = \alpha \cdot \overrightarrow{O'A'} + \beta \cdot \overrightarrow{O'B'}$. Wektor łączący środki $M$ i $Z$ odcinków $OO'$ i $XX'$ spełnia równość $(*)$, która teraz przybiera postać

$$\overrightarrow{MZ} = \alpha \cdot \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O'A'}) + \beta \cdot \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O'B'}) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}).$$

Wynika z niej, że zbiór $\pi^*$, złożony z możliwych położeń punktu $Z$, zawiera się w pewnej płaszczyźnie.

## Zadania z fizyki nr 276, 277

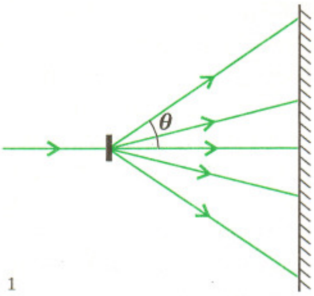
*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 1999

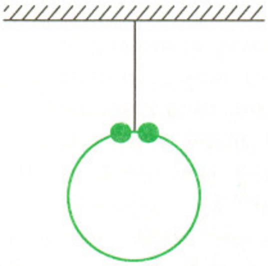
**276.** Izolowane termicznie naczynie jest przedzielone na dwie części: jedna część zawiera 50 g wody o temperaturze 70°C, a w drugiej (o objętości 0,2 m$^3$) jest próżnia. Usunięto przegrodę rozdzielającą obie części. Obliczyć końcową temperaturę wody i pary (w stanie równowagi). Dane są: ciepło właściwe wody $c = 4{,}19$ J/(g · K) oraz tabela przedstawiająca zależność ciepła parowania wody $q$ oraz gęstości pary wodnej nasyconej $\varrho$ od temperatury:

| $T$ (°C) | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ (J/g) | 2471 | 2460 | 2448 | 2437 | 2425 | 2414 | 2402 | 2391 | 2379 | 2368 | 2357 | 2345 | 2333 |
| $\varrho$ (g/m$^3$) | 9,40 | 12,8 | 17,3 | 23,0 | 30,3 | 39,5 | 51,0 | 65,3 | 82,7 | 103,9 | 129,5 | 160,2 | 196,7 |

**277.** Promień światła pada prostopadle na siatkę dyfrakcyjną o stałej $d = 2$ µm, za którą w pewnej odległości znajduje się ekran (rys. 1; oczywiście, proporcje rysunku nie muszą odpowiadać rzeczywistości). Zaobserwowane na ekranie widmo jest przedstawione na okładce. Obliczyć długości fali trzech zaznaczonych linii widmowych.




Rys. 1



Rys. 2

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1998

Przypominamy treść zadań:

**268.** Cienki pierścień w kształcie okręgu o masie $M$ wisi na nierozciągliwej nici, a dwa koraliki – każdy o masie $m$ – jednocześnie zwolniono w punktach położonych symetrycznie i bardzo blisko punktu najwyższego (rys. 2). Jeśli koraliki ślizgają się bez tarcia, to ile musi wynosić stosunek $m/M$, aby pierścień podskoczył?

**269.** Próbka izotopu promieniotwórczego emituje promienie $\alpha$ o energii $E = 5$ MeV, a z jednej strony jest osłonięta (tak, że w jednej półprzestrzeni promienie wybiegają na zewnątrz, a w drugiej są pochłaniane). Jaka ilość ciepła wydzielałaby się w osłonie w jednostce czasu, jeśli siła odrzutu działająca na próbkę z osłoną wynosiłaby $F = 1$ N? Pominąć oddziaływanie cząstek $\alpha$ z powietrzem, tzn. przyjąć, że urządzenie działa w próżni. Masa cząstki $\alpha$ jest równa $m = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg $=$ $= 3730$ MeV/c$^2$.

**268.** Oznaczmy promień pierścienia przez $r$. Z zasady zachowania energii wynika, że gdy koraliki zakreślą kąt $\alpha$ względem położenia początkowego, uzyskają prędkość równą $v = \sqrt{2gr(1-\cos\alpha)}$. Siła odśrodkowa będzie wtedy równa $F_o = mv^2/r = 2mg(1-\cos\alpha)$, siła oddziaływania między koralikiem a pierścieniem będzie $R = F_o - mg\cos\alpha = mg(2 - 3\cos\alpha)$, a łączna siła oddziaływania na pierścień (z dodatnim zwrotem w górę) wyniesie

$$F = 2R\cos\alpha = 2mg(2-3\cos\alpha)\cos\alpha.$$

Maksymalną wartością tego wyrażenia jest $F_{\max} = (2/3)mg$, tzn. pierścień podskoczy, gdy $m/M > 3/2$.

**269.** Oznaczmy moc promieniowania przypadającego na każdą z półprzestrzeni przez $P$. Odpowiada to liczbie emitowanych cząstek równej $P/E$ (na jednostkę czasu), z czego na kąt bryłowy d$\Omega$ przypada

$$\mathrm{d}N = \frac{P}{E}\frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi}$$

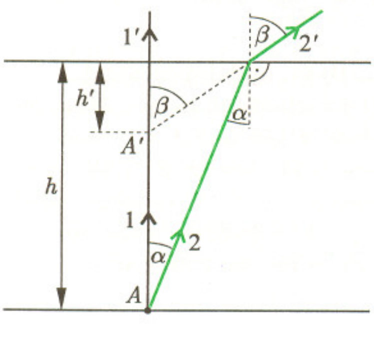
cząstek (kąt $2\pi$ odpowiada całej półprzestrzeni). Siłę odrzutu $F$ otrzymamy, mnożąc tę wielkość przez pęd jednej cząstki $p = \sqrt{2mE}$ i przez cosinus kąta $\theta$ zawartego między przypadkowym kierunkiem emisji a kierunkiem prostopadłym do płaszczyzny osłony, i następnie całkując po kierunkach. Ponieważ $\mathrm{d}\Omega = 2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta$, $\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = 1/2$, więc otrzymujemy

$$F = \frac{1}{2}P\sqrt{\frac{2m}{E}}, \quad \text{zatem} \quad P = F\sqrt{\frac{2E}{m}} = 15{,}5 \text{ MW}.$$

Praktyczne wykorzystanie takiego „napędu odrzutowego" nie jest więc realne.

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 264 ($WT$=1,83) i 265 ($WT$=1,90) z numeru 10/1998

| | | |
|---|---|---|
| Jarosław Łazuka | – Warszawa | 42,31 |
| Marek Wójcicki | – Szczecin | 38,70 |
| Andrzej Nowogrodzki | – Chocianów | 26,51 |
| Tomasz Wietecha | – Tarnów | 26,49 |
| Aleksander Surma | – Myszków | 17,27 |
| Andrzej Idzik | – Bolesławiec | 16,70 |




**Rozwiązanie zadania F 497.**
Patrząc na przedmiot leżący na dnie rzeki (powiedzmy, w punkcie $A$), widzimy obraz przedmiotu w punkcie $A'$, będącym punktem przecięcia się promieni załamanych $1'$ i $2'$. Oznaczając przez $\alpha$ kąt padania promienia 2, a przez $\beta$ kąt załamania tego promienia, otrzymujemy

$$h\,\mathrm{tg}\,\alpha = h'\,\mathrm{tg}\,\beta\,.$$

Dla małych kątów $\alpha$ i $\beta$ mamy, $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \sin\alpha$ i $\mathrm{tg}\,\beta \approx \sin\beta$, a więc:

$$h = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}h' = nh'\,,$$

gdzie $n = 1{,}33$ jest współczynnikiem załamania wody. Stąd rzeczywista głębokość rzeki wynosi około 2,7 m.

**Rozwiązanie zadania M 879.**
Oznaczmy liczbę widzów przez $n$. Obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego (każdy ze zniecierpliwionych widzów będzie mógł wyjść z kina, nie przechodząc przed nosem nikomu z chwilowo jeszcze zaciekawionych filmem). Wszystkich zdarzeń elementarnych jest $n!$, a zdarzeń sprzyjających $2^{n-1}$, bowiem do momentu, gdy w kinie zostanie ostatni widz, znudzeniu muszą kolejno ulegać widzowie siedzący na skrajnym lewym lub skrajnym prawym z zajętych miejsc. Szukane prawdopodobieństwo jest zatem równe $1 - 2^{n-1}/n! = \frac{4723}{4725}$.