Przy przekształceniu symplicjalnym obraz sympleksu jest zawarty w pewnym sympleksie.

przekształcenie zbioru wierzchołków triangulacji T' na zbiór punktów położonych w przestrzeni E^3, taki że żadne cztery punkty tego zbioru nie leżą w jednej płaszczyźnie. Przekształcenie to indukuje pewne przekształcenie symplicjalne politopu P na politop P' będący sumą wszystkich odcinków postaci $\overline{b_\mu b'_j}$ oraz $\overline{b_\nu b'_j}$, gdzie $L_j = \overline{a_\mu a_\nu}$. Z uwagi na (4.4) i (4.5) przekształcenie to jest izometrią wewnętrzną.

Każdy z punktów b_μ leży jednak w kuli Q_1 o środku b_1 i promieniu $r < \eta_1 < \frac{\varepsilon}{6}$, a każdy punkt b'_j leży na obrotowej elipsoidzie $M_{\mu,\nu}$, dla której b_μ jest ogniskiem, a średnica jest równa $\varrho(a_\mu, a_\nu) < \frac{\varepsilon}{3}$. A więc zbiór wszystkich wierzchołków politopu P' ma średnicę mniejszą niż $2 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6}\right) = \varepsilon$. Więc i średnica całego politopu P' jest mniejsza od ε i dowód twierdzenia (4.1) jest zakończony.

Przeniesienie tego twierdzenia na spójne politopy wymiaru większego niż 1 nastręcza istotne trudności. Nierozstrzygnięte jest nawet proste pytanie, czy każdy spójny wielościan dwuwymiarowy jest wewnętrznie izometryczny z wielościanem położonym w przestrzeni E^5, a w szczególności z wielościanem o dowolnie małej średnicy. Nie wiadomo również, czy każde 1-wymiarowe continuum należące do klasy **GA** jest wewnętrznie izometryczne z continuum położonym w przestrzeni E^5. W geometrii wewnętrznej, rozumianej w sensie tu podanym, istnieje wiele zagadnień, które oczekują rozstrzygnięcia. Nie wiem np. czy miara k-wymiarowa (odpowiednio zdefiniowana w przestrzeni **GA**) zachowuje się niezmienniczo przy izometriach wewnętrznych. Nie wiadomo też, kiedy izometria wewnętrzna $f : A \to A'$ (gdzie A i A' są **GA**-zbiorami położonymi w przestrzeni Hilberta H) daje się otrzymać przez ciągłą deformację zbioru A, zachowującą długość krzywych, tj. czy istnieje przekształcenie ciągłe

$$\widehat{f} : A \times \langle 0, 1\rangle \to H,$$

takie że $\widehat{f}(x, 0) = x$, $\widehat{f}(x, 1) = f(x)$ dla każdego punktu $x \in A$ oraz że dla każdego $t \in \langle 0, 1\rangle$ przekształcenie $f_t : A \to H$ dane przez wzór $f_t(x) = \widehat{f}(x, t)$ jest izometrią wewnętrzną.

Nie wiadomo też, kiedy zbiór $A \in$ **GA** położony w przestrzeni E^n daje się przez izometrię wewnętrzną przeprowadzić na zbiór $A' \subset E^n$, który nie jest izometryczny z A w sensie metryki ϱ.

Lista nierozstrzygniętych pytań geometrii wewnętrznej jest bardzo obszerna.

Rozwiązanie zadania M 882.
Dla ciągu stałego teza jest oczywista. Niech $r \neq 0$ będzie różnicą ciągu; dobierzmy liczbę naturalną k tak, by mieć $10^{k-1} \leq r < 10^k$. Niech n będzie taką liczbą naturalną, że $10^{n-k} - (n+1) > 0$ i $a_1 < 10^n$. Istnienie takiej liczby jest oczywiste, bowiem ciąg $b_n = 10^{n-k} - (n+1)$ jest rozbieżny do ∞. Niech K będzie zbiorem tych wyrazów ciągu, które są zawarte w przedziale $[10^n, 10^{n+1})$. Zbiór K zawiera co najmniej $9 \cdot 10^{n-k}$ elementów. Wreszcie suma cyfr dowolnego elementu z K jest nie większa niż $9(n+1)$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika więc, że spośród elementów zbioru K można wybrać dwa o tej samej sumie cyfr.

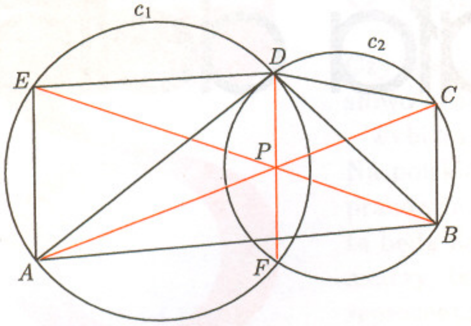
Kącik olimpijski (23)

Trzynaste zadanie

W dniach 6–10 listopada 1998 r. odbyła się w Warszawie IX Olimpiada Matematyczna Państw Bałtyckich *Baltic Way* '98. W konkursie tym brały udział ekipy następujących 10 państw: Danii, Estonii, Finlandii, Islandii, Niemiec, Norwegii, Litwy, Łotwy, Polski, Szwecji oraz miasta Sankt Petersburg. W skład każdej delegacji wchodzili uczniowie szkół średnich. Zawody miały charakter drużynowy i polegały na rozwiązaniu 20 zadań w ciągu $4\frac{1}{2}$ godziny. Każde zadanie było oceniane w skali 0–5 punktów. Drużyna polska z sumą 68 punktów zajęła trzecie miejsce za drużyną Łotwy (72 pkt.) oraz Estonii (70 pkt.).

Zadanie 13. sprawiło uczniom najwięcej trudności – żadnej ekipie nie udało się zdobyć ani jednego punktu za rozwiązanie tego zadania (i jak tu nie być przesądnym...). Niżej zaprezentujemy dwa rozwiązania tego zadania.

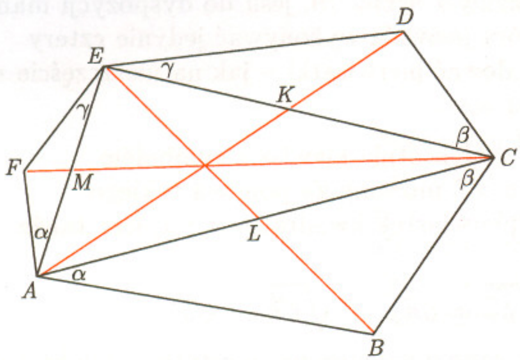
13. *W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ boki AE i BC są równoległe oraz $\angle ADE = \angle BDC$. Przekątne AC i BE przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że $\angle EAD = \angle BDP$ oraz $\angle CBD = \angle ADP$.*



Rys. 1

I rozwiązanie:
Niech c_1 i c_2 będą odpowiednio okręgami opisanymi na trójkątach AED i BCD (rys. 1). Załóżmy, że prosta DP przecina okrąg c_2 w punkcie F. Ponieważ $\angle ADE = \angle BDC$, więc stosunek długości odcinków EA i BC jest równy stosunkowi długości promieni okręgów c_1 i c_2. Zatem jednokładność o środku P, przekształcająca AE na CB, przekształaca okrąg c_1 na okrąg c_2. Ta sama jednokładność przekształca łuk DE okręgu c_1 na łuk FB okręgu c_2. Stąd wynika, że $\angle EAD = \angle BDF = \angle BDP$. Drugą równość dostajemy analogicznie.

Powyższe rozwiązanie to tzw. rozwiązanie oficjalne, dostarczone przez autora zadania. Podczas wyboru zadań niektórzy członkowie międzynarodowego Jury, zapoznawszy się z samym zadaniem i powyższym rozwiązaniem, uznali, że zadanie to jest łatwe...



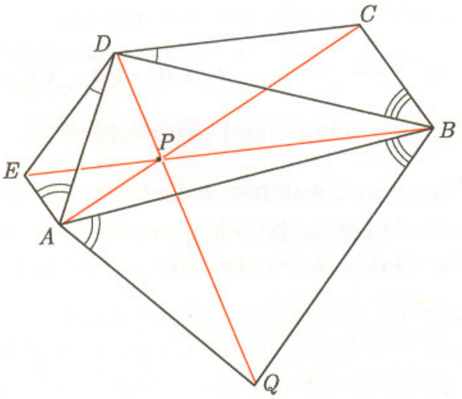
Rys. 2

II rozwiązanie:
Lemat: *Załóżmy, że w sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą związki: $\angle EAF = \angle CAB = \alpha$, $\angle ACB = \angle ECD = \beta$, $\angle CED = \angle AEF = \gamma$. Wówczas przekątne AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.*

Dowód: Przez $[XYZ]$ będziemy oznaczać pole trójkąta XYZ. Niech K, L, M będą odpowiednio punktami przecięcia następujących par odcinków: AD, EC; BE, CA; CF, AE (rys. 2). Dostajemy następujące równości:

$$\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CK}{KE}\cdot\frac{EM}{MA} = \frac{[ABE]}{[CBE]}\cdot\frac{[CDA]}{[EDA]}\cdot\frac{[EFC]}{[AFC]} = \frac{[ABE]}{[AFC]}\cdot\frac{[CDA]}{[CBE]}\cdot\frac{[EFC]}{[EDA]} =$$
$$= \frac{AB\cdot AE}{AF\cdot AC}\cdot\frac{CD\cdot CA}{CB\cdot CE}\cdot\frac{EF\cdot EC}{ED\cdot EA} =$$
$$= \frac{AB}{CB}\cdot\frac{CD}{ED}\cdot\frac{EF}{AF} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 1\,,$$

skąd, na mocy twierdzenia Cevy, przekątne AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 3

Przystępujemy do rozwiązania naszego zadania. Na boku AB danego pięciokąta $ABCDE$ budujemy (po jego zewnętrznej stronie) trójkąt ABQ tak, aby $\angle QAB = \angle EAD$ oraz $\angle QBA = \angle CBD$ (rys. 3). Na mocy lematu, punkty D, P, Q są współliniowe. Ponieważ odcinki AE i BC są równoległe, więc

$$\angle ADB = \angle EAD + \angle CBD = \angle QAB + \angle QBA = 180^\circ - \angle AQB\,.$$

Zatem na czworokącie $AQBD$ da się opisać okrąg, skąd $\angle EAD = \angle BAQ = \angle BDQ = \angle BDP$. Drugą równość dostajemy analogicznie.

Ciekawe, jak zareagowałoby Jury, gdyby *II rozwiązanie* było rozwiązaniem oficjalnym, dostarczonym przez autora zadania. Najprawdopodobniej osądzono by, że zadanie jest za trudne i nie pojawiłoby się ono na zawodach...

Obszerniejsze sprawozdanie oraz pozostałe zadania z zawodów *Baltic Way* '98 można znaleźć w Internecie na stronie Olimpiady Matematycznej: `http://www.impan.gov.pl/~olimp/` , jak również w broszurze: *L Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego.* Broszura ta zostanie rozesłana do wszystkich szkół średnich w Polsce we wrześniu 1999 r.

Waldemar POMPE