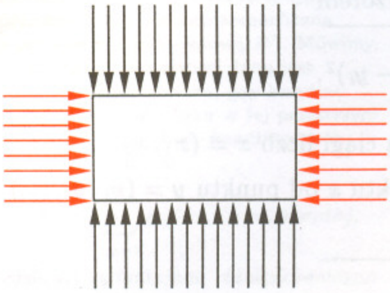
Ściskanie sztywnej ameby

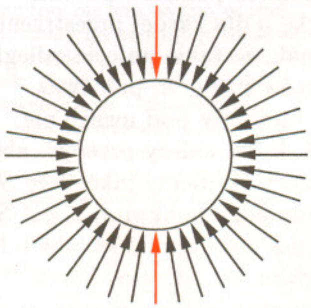
Piotr CHRZĄSTOWSKI



Rys. 1

Wyobraźmy sobie prostopadłościenny klocek, na którego boczne ścianki będziemy działali identycznymi, równomiernie rozłożonymi siłami (kto chce, niech wyobrazi sobie ciśnienie wywierane na ścianki klocka przez otaczający go ośrodek). Dość oczywiste jest, że siły te wzajemnie się zniosą. W każdym bowiem prostopadłym przekroju otrzymamy prostokąt, a jeżeli działamy jednakową siłą na wszystkie punkty obwodu prostokąta (rys. 1), to wypadkowa będzie równa zeru. Każdy wektor przyłożony do dowolnego punktu ma na przeciwległym boku swojego kontrpartnera, który anuluje jego działanie.

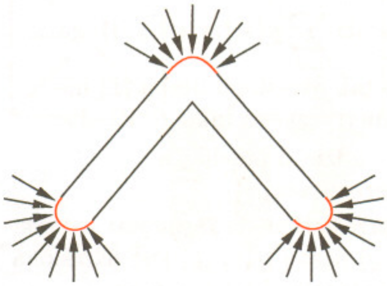
Bez trudu dojdziemy do wniosku, że podobnie będzie dla walca: w przekroju otrzymamy okrąg, w którym przeciwległe wektory będą znosiły swoje działanie (rys. 2). Dla trójkątnego przekroju siły też się wzajemne znoszą, ale to już nie jest tak oczywiste.



Rys. 2

Zapytajmy, co się stanie, jeśli zaczniemy eksperymentować z powierzchnią przekroju, próbując ją deformować tak, aby uzyskać niezerową wypadkową identycznych sił równomiernie przyłożonych do brzegu z zewnątrz. Wyobraźmy sobie np. figurę w kształcie bumerangu, jak na rysunku 3. Wzdłuż jej prostoliniowych odcinków następuje znoszenie się sił. Pozostają trzy łuki: jeden z góry i dwa z dołu. Czy działanie połączonych sił oddolnych nie może przeważyć działania siły przyłożonej od góry?

Okazuje się, że nie! Jakkolwiek będziemy się starali wykrzywić kształt brzegu, zawsze wypadkowa sił wynosi zero. Jest to wniosek ze znanych twierdzeń rachunku całkowego, związanych z nazwiskami Ostrogradzkiego, Gaussa i Stokesa. Twierdzenia są ogólniejsze, ale ten przypadek szczególny jest na tyle interesujący, że możemy się pokusić o jego niezależne uzasadnienie.

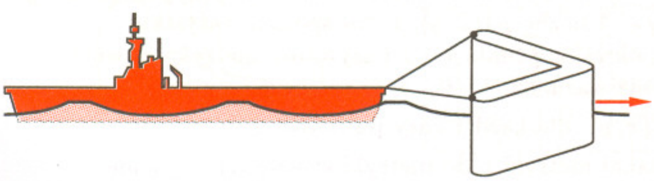


Rys. 3

Świat byłby piękny, gdyby udało się nam taki kształt znaleźć. Mielibyśmy bowiem bardzo proste *perpetuum mobile*. Wystarczyłoby wykonać, na przykład z drewna, klocek o wymyślonym przez nas przekroju i włożyć go do wody (o ile nie wyrwałoby go nam z rąk wcześniej ciśnienie atmosferyczne!). Siły pionowe, spowodowane ciśnieniem hydrostatycznym, byłyby równoważone grawitacją. Na każdej głębokości otrzymalibyśmy natomiast wymyślony przez nas kształt. Działałaby na niego wypadkowa siła proporcjonalna do głębokości zanurzenia. Skumulowane z wszystkich głębokości siły skierowane byłyby w jednym kierunku i nasz klocek zacząłby się w tym kierunku przesuwać. Już sobie wyobrażam holowniki, które ciągnęłyby statki, jak na rysunku 4. I wyobrażam sobie, ile śmiechu byłoby, gdyby się taki klocek urwał!

Ale *perpetuum mobile* nie istnieje, więc okazji do śmiechu musimy szukać gdzie indziej.

* * *



Rys. 4

Tym sposobem udowodniliśmy, że dla dowolnej gładkiej powierzchni S, która jest brzegiem pewnego obszaru przestrzeni $\mathbb{R}^3$, całka z pola wektorów normalnych do S względem miary powierzchniowej jest równa zeru, albo, jeśli kto woli (i lubi) zapis symboliczny,

$$\int_S \mathbf{n}(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = 0.$$

Drogi Czytelniku: jeśli akurat jesteś studentem drugiego roku matematyki lub byłeś nim jakiś czas temu i od tamtej pory twierdzenie Stokesa uważasz za, delikatnie mówiąc, średnio przyjemne i średnio zrozumiałe – w razie potrzeby myśl o zanurzonym klocku i wypadkowej sił, a nie o miarach, całkach, powierzchniach itp.