Jak to było z $E=mc^2$?

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Jest zaskakującym paradoksem, że pierwsze wyprowadzenie najsłynniejszej fizycznej formuły $E = mc^2$, w której, przypomnę, E jest energią, m masą, a c prędkością światła, nie było w istocie wyprowadzeniem. W pracy, pochodzącej z września 1905 roku, Albert Einstein rozważał inercję ciała, gdy ono traci energię, emitując światło. Inercja określana jest właśnie przez masę ciała. Jak zauważono w wiele lat po ukazaniu się wspomnianej pracy, Einstein uzyskał słynną formułę, „przemycając" ją w przyjętym założeniu.

Relacja między masą a energią jest bardzo głęboko wkomponowana we współczesną postać teorii względności. Aby więc uchwycić, na czym polega problem z wyprowadzeniem słynnej formuły, musimy sobie uświadomić, co Einstein wiedział, przystępując do analizy zagadnienia inercji. Wspomniana już praca, zatytułowana *Czy inercja ciała zależy od zawartej w nim energii?* była dopiero drugą publikacją poświęconą teorii względności. Wcześniej ukazał się tylko wiekopomny artykuł Einsteina *O elektrodynamice poruszających się ciał*, w którym wyłożone zostały podstawy teorii. Genialny fizyk wykazał w nim, w szczególności, że energia kinetyczna T ciała o masie m, poruszającego się z prędkością v, równa jest

$$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) \cong \frac{mv^2}{2}\,. \tag{1}$$

Druga, przybliżona równość zachodzi, gdy prędkość ciała jest dużo mniejsza od prędkości światła. Podkreślmy tutaj, że pojęcie pełnej energii ciała, a więc energii uwzględniającej jego masę, jeszcze w fizyce nie zaistniało. Do tego właśnie była potrzebna formuła $E = mc^2$.

W pierwszej pracy dotyczącej teorii względności wykazane zostało również, że jeśli energia fali świetlnej wynosi E w jednym układzie odniesienia, to w drugim układzie, który porusza się względem pierwszego z prędkością $\boldsymbol{v}$, energia ta jest równa

$$E' = E\,\frac{1-\frac{v}{c}\cos\phi}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,,$$

gdzie $v \equiv |\boldsymbol{v}|$, zaś ϕ jest kątem pomiędzy kierunkiem rozchodzenia się fali a wektorem $\boldsymbol{v}$.

A teraz rozważmy, tak jak to czyni Einstein, następującą sytuację. Ciało, spoczywające w pewnym układzie odniesienia, wysyła dwie fale elektromagnetyczne, każdą o energii $E/2$. Ponieważ fale emitowane są w przeciwnych kierunkach, ciało pozostaje w spoczynku. Zasada zachowania energii stwierdza tedy, że

$$E_0 = E_1 + E/2 + E/2\,, \tag{2}$$

gdzie E_0 jest energią ciała przed, a E_1 po emisji fal. W układzie odniesienia, który porusza się z prędkością $\boldsymbol{v}$ względem pierwszego, równanie wyrażające zachowanie energii przyjmuje postać

$$E_0' = E_1' + \frac{E}{2}\,\frac{1-\frac{v}{c}\cos\phi}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{E}{2}\,\frac{1+\frac{v}{c}\cos\phi}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = E_1' + \frac{E}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \tag{3}$$

Odejmując stronami równania (2) i (3), dostajemy

$$(E_0' - E_0) - (E_1' - E_1) = E\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right). \tag{4}$$

W tym punkcie Einstein wprowadza kluczowe założenie, że wielkość $E_0' - E_0$ może się różnić jedynie o pewną stałą C od energii kinetycznej ciała mierzonej w układzie, w którym to ciało się porusza. A więc,

$$E_0' - E_0 = T_0' + C \tag{5a}$$

oraz analogicznie

$$E_1' - E_1 = T_1' + C\,. \tag{5b}$$

Zauważmy, że przyjęte założenie nie jest bynajmniej oczywiste; szczególnie niezależność stałej C od masy budzi wątpliwość.

Podstawiając postulowane związki (5) do równania (4) oraz wykorzystując wzór (1), dostajemy

$$m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)-m_1 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)=E\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right),$$

co natychmiast prowadzi do poszukiwanej formuły

$$(m_0-m_1)c^2=E\,. \tag{6}$$

Widzimy tutaj, że ubytek masy ciała pomnożony przez c^2 równy jest wypromieniowanej energii.

Na czym zatem polega błąd Einsteina? Dzięki wyrażeniu (1) mamy

$$T_0'-T_1'=(m_0-m_1)c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right),$$

co pozwala przekształcić prawą stronę równania (4). Znajdujemy wtedy

$$(E_0'-E_0)-(E_1'-E_1)=\frac{E}{(m_0-m_1)c^2}\,(T_0'-T_1')\,. \tag{7}$$

Równanie (7) jasno pokazuje, że założenie (5) jest faktycznie równoważne wyprowadzanej formule, tzn. wymaga, aby

$$\frac{E}{(m_0-m_1)c^2}=1\,.$$

Wielki fizyk przewidział zapewne postać poszukiwanego wzoru, więc nie bardzo się troszczył o ścisłe wyprowadzenie. Wcale nierzadko się zdarza w naukowej twórczości, że dedukcyjny wywód służy jedynie uzasadnieniu nowatorskiej idei. Pochodzenia pomysłu należy wtedy upatrywać w genialnej intuicji uczonego, co wcale, oczywiście, nie umniejsza jego zasług. Słynną zaś formułę można wyprowadzić kilkoma metodami na gruncie teorii względności, co i sam Einstein w późniejszych pracach pokazał. Przedstawiona historia jest więc jedynie ciekawostką, pokazującą pokrętne drogi genialnych myśli.

Zadania

Przygotował Marek KORDOS

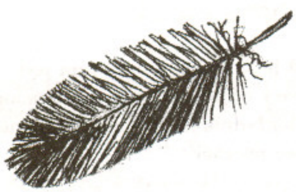
Wskazówki do wszystkich zadań matematycznych można znaleźć w artykule *Jak to robi matematyk?* ze strony 6.

M 883. Wykazać, że w dowolnym czworokącie odcinki łączące środki przeciwległych boków i odcinek łączący środki przekątnych mają wspólny środek.
Rozwiązanie na str. 3

M 884. Wskazać masy, które należy umieścić w wierzchołkach trójkąta, aby środkiem masy był środek okręgu wpisanego w ten trójkąt.
Rozwiązanie na str. 5

M 885. Dla dowolnego punktu M oznaczamy przez M_{AB}, M_{BC}, M_{CA} jego obrazy w symetrii względem, odpowiednio, środka odcinka AB, BC, CA. Wykazać, że proste $M_{AB}C$, $M_{BC}A$, $M_{CA}B$ przecinają się w jednym punkcie.
Rozwiązanie na str. 5

Redaguje Ewa CZUCHRY



F 501. Na równiku pewnej planety ciało waży dwa razy mniej niż na biegunie. Gęstość planety jest równa $\varrho = 3\cdot 10^3$ kg/m^3. Wyznaczyć okres obrotu planety dookoła własnej osi. Założyć, że planeta jest jednorodną kulą o promieniu R.
Rozwiązanie na str. 8

F 502. Wyznaczyć gęstość planety, na której doba wynosi 24 godziny, a na jej równiku ciała są nieważkie. Ponownie założyć, że planeta jest jednorodną kulą.
Rozwiązanie na str. 4