Jak podwoić sześcian i podzielić kąt na trzy

– czyli konstrukcje geometryczne w przestrzeni

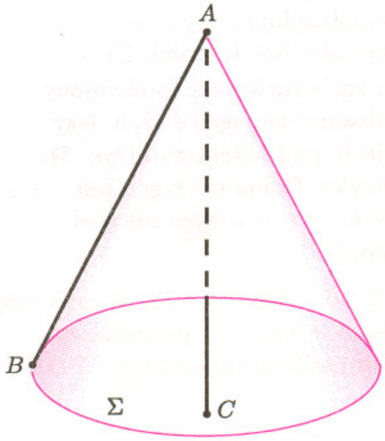
Aleksiej TRETIAKOW i Henryk ŻOŁĄDEK

Wszyscy znamy geometryczne zadania konstrukcyjne. Przeważnie chodzi tu o konstrukcje platońskie, czyli wykonywane cyrklem i linijką na płaszczyźnie. Na przykład mając odcinki o długościach a i b, można w taki sposób skonstruować odcinek o długości $\sqrt{ab}$.

W naszym artykule będzie mowa o konstrukcjach geometrycznych wykonywanych *przestrzennym cyrklem* i *przestrzenną linijką*.

Przestrzenny cyrkiel i przestrzenna linijka

Nietrudno domyślić się, jak działa linijka przestrzenna – daje ona płaszczyznę przechodzącą przez dane trzy punkty nie leżące na jednej prostej.



Rys. 1. Przestrzenny cyrkiel – widok z dołu.

Objaśnienie działania przestrzennego cyrkla jest bardziej złożone. Wyobraźmy sobie, że zwykły szkolny cyrkiel (z dwiema nóżkami równej długości) obraca się wokół jednej unieruchomionej nóżki, a druga nóżka pozostawia ślad powierzchni bocznej stożka – ostatnio takie stożki można rysować na ekranie komputera. Bardziej precyzyjnie: dla danych trzech niewspółliniowych punktów A, B, C, spełniających warunek $AB = AC$, otrzymujemy (ograniczony) stożek Σ, którego osią jest półprosta AC, odcinek AB jest zaś jedną z jego tworzących (rys. 1).

Tak jak w przypadku konstrukcji platońskich, zarówno linijki przestrzennej, jak i przestrzennego cyrkla możemy używać wielokrotnie i w różnych położeniach, przy czym cyrkiel może także zmieniać kąt rozwarcia nóżek. O długości nóżek cyrkla przestrzennego założymy (co robi się również przy konstrukcjach platońskich), że jest ona wystarczająca do wykonywanych konstrukcji.

Przede wszystkim trzeba się przekonać, że naszymi nowymi środkami można wykonać wszystkie konstrukcje platońskie. Zostawimy jednak tę przyjemność Czytelnikom, sugerując, by zacząć od stwierdzenia, iż za pomocą naszych dwóch przestrzennych narzędzi możliwe jest wykonanie następujących konstrukcji:

(a) dana jest prosta l i punkt A na niej; skonstruować płaszczyznę przechodzącą przez A i prostopadłą do l;

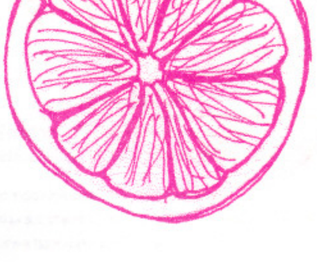
(b) dana jest płaszczyzna Π i punkt A na niej; skonstruować prostą przechodzącą przez A i prostopadłą do Π;

(c) dana jest prosta l oraz punkty A i B poza nią; skonstruować płaszczyznę przechodzącą przez A i B oraz równoległą do l.

Czy te konstrukcje można przeprowadzić bez założenia o równości ramion cyrkla, tzn. gdy dysponujemy jedynie stożkiem o zmiennym kącie rozwarcia?

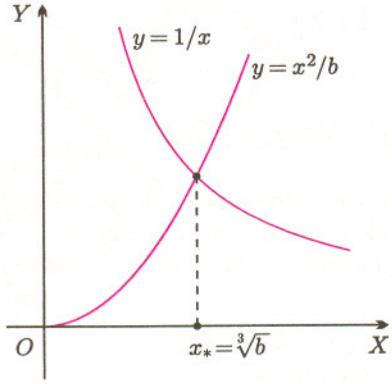
Problem podwojenia sześcianu

Starożytni Grecy nie potrafili zrealizować wszystkich naturalnych konstrukcji za pomocą zwykłego cyrkla i zwykłej linijki. Jednym z problemów, który sprawił sporo zamętu, był *problem podwojenia sześcianu.*



Wedle podania, gdy na wyspie Delos wybuchła epidemia, wysłani do Pytii Delfickiej posłowie przywieźli odpowiedź Apollina, że – aby zarazie zaradzić – należy zwiększyć dwukrotnie jego sześcienny ołtarz ofiarny o krawędzi a, nie zmieniając przy tym jego kształtu. Należało zatem skonstruować sześcian o krawędzi $a\sqrt[3]{2}$. Próby znalezienia platońskiej konstrukcji odcinka o długości $a\sqrt[3]{2}$ okazały się bezowocne. A zajmowali się tym problemem tacy uczeni, jak Hipokrates z Chios, Archytas z Tarentu, Eratostenes, Heron i inni. Archytas podał konstrukcję $a\sqrt[3]{2}$ poprzez przecięcie trzech powierzchni w przestrzeni.

W pierwszej połowie IV w.p.n.e. Menaichmos badając przekroje stożka, wykazał, że liczba $a\sqrt[3]{2}$ jest odciętą jednego z punktów przecięcia paraboli $x^2 = ay$ i paraboli $y^2 = 2ax$, jak też paraboli $x^2 = ay$ i hiperboli $xy = 2a^2$.



Rys. 2

Dopiero w 1837 roku francuski matematyk, P. Wantzel, wykazał niewykonalność podwojenia sześcianu za pomocą cyrkla i linijki na płaszczyźnie.

Spośród innych starożytnych problemów, których nie da się rozwiązać za pomocą zwykłego cyrkla i linijki, należy wymienić trysekcję kąta oraz konstrukcje siedmiokąta foremnego i dziewięciokąta foremnego. Dla ich rozwiązania Grecy stworzyli nowe, oryginalne instrumenty, np. konchoidograf. Omówimy te problemy w ostatniej części artykułu.

Powróćmy do problemu podwojenia sześcianu. Mając odcinki o długościach 1 i b, będziemy konstruowali odcinek o długości $\sqrt[3]{b}$. Użyjemy do tego paraboli $y = x^2/b$ i hiperboli $y = 1/x$. Odcięta ich punktu przecięcia na płaszczyźnie XOY to $x_* = \sqrt[3]{b}$ (patrz rys. 2).

Zadanie sprowadza się więc do konstrukcji paraboli i hiperboli za pomocą naszych nowych narzędzi.

Konstrukcja paraboli $y = x^2/b$

Ustalmy płaszczyznę Π i obierzmy taki układ współrzędnych, by osie OX i OY leżały na Π, a OZ była do niej prostopadła. Niech stożek Σ_1, o wierzchołku w punkcie $O_1 = (0, -\frac{1}{2}b, -\frac{\sqrt{3}}{2}b)$ i kącie rozwarcia (podwojony kąt rozwarcia ramion cyrkla) $\pi/3$, będzie tak położony, że jego oś O_1K leży w płaszczyźnie YOZ i przecina oś OY w punkcie K pod kątem $\pi/6$ (rys. 3). Zatem półprosta O_1O jest jedną z tworzących stożka. Dolna tworząca jest równoległa do osi OY. Zauważmy przy okazji, że $O_1O = b$, a więc również $OK = b$ (jako że trójkąt O_1KO jest równoramienny).

Znajdziemy teraz równanie punktów przecięcia $\Pi \cap \Sigma_1$. Dla $M = (x, y)$ oznaczmy przez M_y jego rzut prostokątny na oś OY i przez P – jego rzut prostokątny na oś O_1K. Zatem płaszczyzna MM_yP jest prostopadła do płaszczyzny YOZ. Ponieważ $OM_y = y$, więc $M_yK = b - y$.

Dla trójkąta prostokątnego MPM_y mamy

$$MP^2 = MM_y^2 + M_yP^2 = x^2 + M_yK^2 \sin^2(\pi/6) = x^2 + (b-y)^2/4.$$

Oznaczmy przez N punkt przecięcia tworzącej O_1O z płaszczyzną MPM_y. Trójkąt ONM_y jest równoboczny, co daje $ON = y$ i $O_1N = b + y$. Mamy zatem

$$MP = NP = O_1N \sin(\pi/6) = (b+y)/2,$$

co razem z poprzednim wzorem daje $(b+y)^2/4 = x^2 + (b-y)^2/4$, czyli

$$y = x^2/b.$$

Konstrukcja hiperboli $y = 1/x$

Przy takim samym wyborze płaszczyzny Π i układu współrzędnych niech stożek Σ_2 ma wierzchołek w punkcie $O_2 = (0, 0, -\sqrt{2})$, oś równoległą do dwusiecznej $\angle XOY$ i kąt rozwarcia równy $\pi/2$ (rys. 4).

Rozwiązanie zadania F 504.
Promienie światła padające na granicę woda–powietrze przechodzą z ośrodka bardziej gęstego optycznie do mniej gęstego. Na skutek tego promienie, które padają na granicę rozdziału ośrodków pod kątem równym lub większym od granicznego, doznają całkowitego wewnętrznego odbicia. Sinus tego granicznego kąta wynosi

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{n},$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania woda–powietrze.

Na powierzchnię mogą wydostać się jedynie promienie zawarte w stożku o wierzchołku w źródle światła i kącie rozwarcia $2\alpha_0$ oraz średnicy podstawy $2R_0$, takiej że

$$R_0 = h \operatorname{tg} \alpha_0,$$

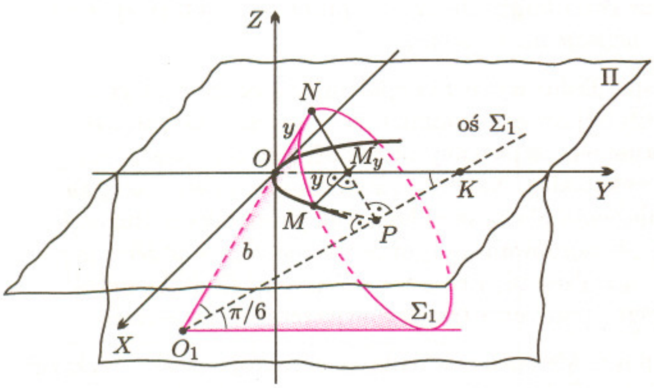
gdzie h jest głębokością wody.

Wyznaczając $\operatorname{tg} \alpha_0$

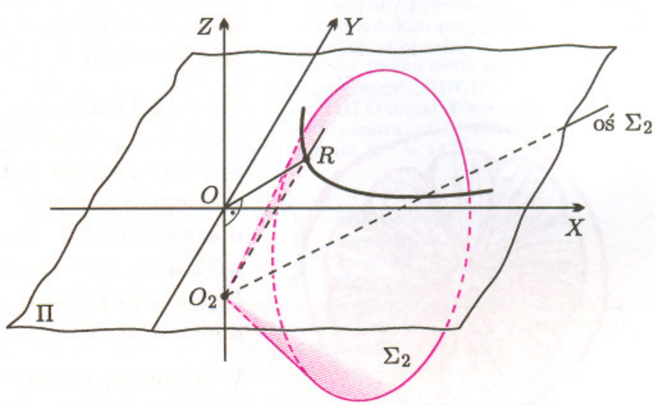
$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

otrzymujemy minimalny promień płytki mogącej zasłonić źródło światła

$$R_0 = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 11{,}4 \text{ cm}.$$



Rys. 3



Rys. 4

Rozwiązanie zadania M 887.
Różnych od zera reszt z dzielenia przez n jest $n-1$, więc z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że pewne dwie liczby z naszego ciągu dają tę samą resztę z dzielenia przez n. Ich różnica jest równa kd dla pewnego $1 \le k < n$. Ponieważ $n|kd$, więc liczby d i n nie mogą być względnie pierwsze – w przeciwnym przypadku byłoby $n|k$, co przeczy nierówności $k < n$.

Ponieważ stożek Σ_2 jest przesuniętym w dół stożkiem z półosiami OX i OY jako tworzącymi i dwusieczną $\angle XOY$ jako osią, więc jego przecięcie z płaszczyzną Π jest hiperbolą z osiami OX i OY jako asymptotami. Ogólne równanie takiej hiperboli ma postać $xy = c$.

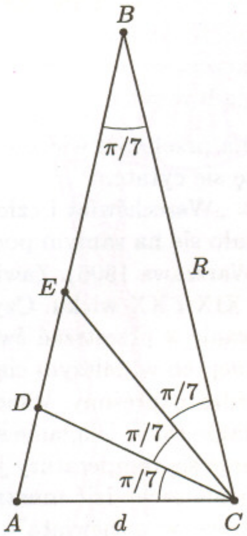
Aby pokazać, że $c = 1$, wystarczy sprawdzić, że punkt $R = (1, 1, 0)$ leży w $\Pi \cap \Sigma_2$. Wynika to natychmiast z faktu, że trójkąt OO_2R jest równoramienny i prostokątny.

Chętni mogą również wyprowadzić równanie hiperboli $\Pi \cap \Sigma_2$ w podobny sposób, jak to zrobiliśmy dla paraboli $\Pi \cap \Sigma_1$.

Inne nierozstrzygnięte problemy starożytnych

Do problemu skonstruowania odcinka o długości będącej pierwiastkiem sześciennym z długości danego odcinka sprowadzają się liczne inne problemy konstrukcyjne. Dla przykładu rozwiążemy tu zadania wymienione na zakończenie pierwszej części tego artykułu. Wobec tego, co już zostało wykazane, będzie to znaczyło, że można je rozwiązać za pomocą przestrzennej linijki i przestrzennego cyrkla.

Siedmiokąt foremny



Rys. 5

W trójkącie równoramiennym ABC, gdzie $AB = BC = R$ i $\angle ABC = \pi/7$, obliczymy długość d boku AC. Mamy $\angle A = \angle C = 3\pi/7$. Jeśli punkty D i E na boku AB są obrane tak, że półproste CD i CE dzielą $\angle C$ na trzy równe części (po $\pi/7$; rys. 5), to wtedy $CD = CA = d$, a z podobieństwa ΔACD i ΔABC mamy $AD = d^2/R$. Ponieważ trójkąt CBE jest równoramienny, więc $EB = EC = R - d$.

Tu skorzystamy z (niezbyt popularnego) twierdzenia o dwusiecznej kąta, które głosi, że *kwadrat jej długości jest równy różnicy między iloczynem długości boków wychodzących z danego wierzchołka i iloczynem długości odcinków, na które dwusieczna dzieli przeciwległy bok* (prosimy je udowodnić). Stosując je do trójkąta DBC otrzymujemy

$$EC^2 = DC \cdot BC - DE \cdot BE,$$

czyli

$$(R-d)^2 = dR - (d - d^2/R)(R-d),$$

co daje równanie trzeciego stopnia z niewiadomą d

$$d^3 - Rd^2 - 2R^2d + R^3 = 0.$$

Takie zaś równanie można (za pomocą wzorów Cardano) rozwiązać, gdy umie się wyciągać pierwiastki drugiego i trzeciego stopnia – a to już umiemy. Możemy więc skonstruować trójkąt z rysunku 5, czyli segment czternastokąta foremnego. Łącząc zaś co drugi wierzchołek tego czternastokąta, otrzymujemy siedmiokąt foremny.

Dziewięciokąt foremny

Czytelnik zechce sprawdzić, że przeprowadzając podobne rozumowanie dla trójkąta równoramiennego o kącie $\pi/9$ przy wierzchołku, otrzymamy dla d równanie

$$d^3 - 3R^2d + R^3 = 0,$$

co daje osiemnastokąt, a w konsekwencji i dziewięciokąt foremny.

Trysekcja kąta, czyli podział kąta na trzy równe części.
Gdy kąt α jest dany przez jego sinus równy m, to, wobec tożsamości $\sin\alpha = 3\sin(\alpha/3) - 4\sin^3(\alpha/3)$, mamy równanie

$$4n^3 - 3n + m = 0,$$

z niewiadomą $n = \sin(\alpha/3)$. Jeśli zaś mamy znalezioną wartość sinusa (czyli długość przeciwległej przyprostokątnej w trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej równej 1), to mamy i kąt.

Tak więc wszystkie te konstrukcje można wykonać przestrzenną linijką i przestrzennym cyrklem.

Literatura:

M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1994.

Хрестоматия по истории математики (А.П. Юшкевич, red.), Просвещение, Москва 1976.