tak, by aksjomaty A były spełnione, ale formuła φ nie. Korzystając z tego, że „nowe” stałe nie są wspomniane w A, rozszerzamy niesprzeczną teorię $A \cup \{\neg\varphi\}$ do teorii zupełnej T, mającej tę własność, iż ilekroć zdanie egzystencjalne $\exists x \psi(x)$ należy do T, to dla jakiejś stałej c, $\psi(c)$ należy do T. Taką konstrukcję musimy powtórzyć nieskończenie wiele razy, coraz to dodając nowe stałe. Ale każda formuła jest skończona i wobec tego, po owej iteracji wykonanej nieskończenie wiele razy, własność zupełności względem zbioru dodanych stałych będzie spełniona. Z tak skonstruowanego zbioru formuł już łatwo odczytać model, w którym A jest prawdziwe, ale φ nie. Na dodatek, jeśli język, z którego zaczynaliśmy konstrukcję, jest przeliczalny, to i model, jaki został skonstruowany, jest przeliczalny. Wynika stąd coś dziwnego, mianowicie że zbiór zdań prawdziwych arytmetyki liczb rzeczywistych (a nawet teorii mnogości!) ma modele przeliczalne. Pokazuje to, że logika „pierwszego rzędu” (dla której mamy własność zupełności) nie opisuje struktur nieskończonych w sposób jednoznaczny. Łatwo też zobaczyć, że arytmetyka Peano (w języku pierwszego rzędu) ma wiele nieizomorficznych modeli. Jeśli zezwolimy na pisanie zdań, w których będą kwantyfikatory przebiegające *podzbiory* zbioru liczb naturalnych, to „paradoks” nieizomorficznych struktur, spełniających arytmetykę Peano, znika, ale tylko pozornie. W każdym modelu teorii mnogości taka teoria ma jeden model, ma jednak inne, gdy zmieniamy model teorii mnogości.

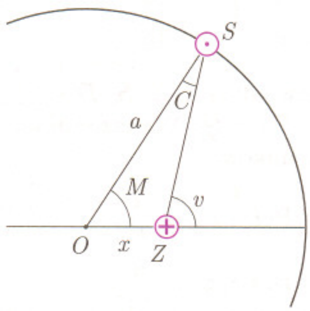
Drugi problem Hilberta dotyczył niesprzeczności arytmetyki Peano. Jak można by wykazać ową niesprzeczność? Intuicyjnie arytmetyka Peano jest niesprzeczna – aksjomaty dotyczące sumy i iloczynu sprawdza się „na palcach”, a nawet schemat indukcji jest też oczywisty – każde dziecko wie, że jeśli ustawić kamienie domina pionowo, jeden za drugim i popchnąć, to wszystkie się przewrócą, nawet jeśli jest ich bardzo wiele. Jak można formalnie udowodnić, że żaden dowód nie wykaże równości $0 = 1$? Ale co to jest dowód?

Nieco uogólniając „drugi problem Hilberta”, można pytać o niesprzeczność matematyki (nie tylko arytmetyki, ale teorii ZFC). W roku 1931 Gödel wykazał, że nie da się udowodnić niesprzeczności arytmetyki (ani teorii ZFC) w niej samej. Samo wyrażenie tej własności nie jest zupełnie proste. Zauważmy, że wewnątrz arytmetyki możemy efektywnie

Koło czy elipsa?

Tomasz KWAST

Planety, jako doskonałe obiekty położone na doskonałym nieboskłonie, musiały – według astronomów starożytnych – poruszać się też w sposób doskonały, czyli jednostajnie po okręgach. Jednak każdy zainteresowany widział, że obserwowany ruch planet nie jest tak doskonały. Pogodzić teorię z obserwacjami Starożytni próbowali na trzy sposoby. Anaksymander (około 610–550 p.n.e.), a później Eudoksos (408–355 p.n.e.), umieszczali planetę na jednostajnie obracającej się sferze, której oś osadzona była w innej sferze obracającej się wokół innej osi itd., aż ostatnia sfera obracała się w końcu wokół Ziemi. Hipparch (190–125 p.n.e.), a po nim Ptolemeusz (100–168 n.e.), robili coś podobnego, tyle że z okręgami. Umieszczali mianowicie planetę na okręgu (epicyklu), którego środek wędrował jednostajnie po innym okręgu itd., a w środku ostatniego okręgu (deferentu) znajdowała się Ziemia. Obie te procedury przypominają to, co obecnie nazwalibyśmy analizą fourierowską. Dzięki autorytetowi Ptolemeusza ten drugi opis zyskał, jak wiadomo, szczególną popularność i przez półtora tysiąca lat w ten właśnie sposób przedstawiano ruchy planet.



Ale Hipparch próbował chwytu jeszcze innego. Niech mianowicie przykładowo Słońce porusza się jednostajnie po okręgu o promieniu a – skoro tak być musi – ale Ziemia, z której Słońce oglądamy, niech leży w niewielkiej odległości x od środka okręgu (rysunek). Tę odległość x należy tak dobrać, by wynikający z tego modelu niejednostajny ruch Słońca najlepiej zgadzał się z obserwowanym.

W trójkącie OSZ jednostajnie (z założenia) narasta kąt M, ale obserwator znajduje się w punkcie Z i może mierzyć np. kąt v między kierunkiem na Słońce a kierunkiem na jego „perygeum”. Gdyby torem Słońca była elipsa, to zależność v od M we współczesnym zapisie miałaby przybliżoną postać

$$v = M + 2e \sin M + \ldots,$$

gdzie tzw. mimośród $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ jest miarą spłaszczenia elipsy o półosiach a i b. Twierdzenie sinusów zastosowane do trójkąta OSZ daje

$$\frac{x}{a} = \frac{\sin C}{\sin v},$$

jak również zachodzi zależność $v = M + C$. Skoro tak, to

$$\sin C = \frac{x}{a} \sin v = \frac{x}{a} \sin(M + C) = \frac{x}{a} (\sin M \cos C + \cos M \sin C).$$

Ale kąt C jest mały, zatem jego sinus jest prawie równy zeru, a cosinus jedności, a więc $\sin C \approx C \approx \frac{x}{a} \sin M$. Stąd

$$v \approx M + \frac{x}{a} \sin M.$$

Tak więc w pierwszym przybliżeniu jednostajny ruch po okręgu będzie widoczny jako obserwowany ruch niejednostajny, gdy współczynnik przy $\sin M$, równy $\frac{x}{a}$, będzie zarazem równy $2e$.

Obecnie wiemy, że mimośród orbity Ziemi (lub, co na jedno wychodzi, orbity Słońca wokół Ziemi) wynosi $e = 0{,}016$. Już Hipparch znalazł niezłe przybliżenie wartości liczbowej tego współczynnika, choć, oczywiście, nie znał jego interpretacji geometrycznej. To dopiero dzięki Keplerowi wiemy, że niejednostajność ruchu Słońca względem Ziemi (lub odwrotnie) wynika z eliptyczności orbit. A pomysł Hipparcha nadal można wykorzystywać przy kreśleniu mało spłaszczonych elips. Na przykład schemat orbit wszystkich planet Układu Słonecznego można w dobrym przybliżeniu narysować cyrklem (bo ich spłaszczenia i tak się nie zauważy), byle tylko wbijać go nie w Słońce (czyli w ognisko), lecz odpowiednio trochę obok. Gdy promienie orbity mają po 10 cm, to (spośród widocznych planet) najdalej od Słońca będzie środek orbity Merkurego – 20,5 mm, najbliżej Wenus – 0,7 mm; dla Ziemi będzie to 1,7 mm.

Reminiscencje olimpijskie

Krzysztof CIESIELSKI

O Olimpiadzie Matematycznej słyszałem już jako uczeń szkoły podstawowej. W „Czytankach" – tak wówczas nazywały się podręczniki do języka polskiego – było (oparte na faktach) opowiadanie „A jednak matma" o Andrzeju, który wyprzedzając starszych kolegów, zajął w Olimpiadzie pierwsze miejsce.
Z zadaniami olimpijskimi zetknąłem się jednak dopiero jako uczeń II klasy liceum. Dostarczono nam kartkę z zadaniami I stopnia, my, młodzi, ambitni, uczniowie klasy o profilu matematycznym, zainteresowani matematyką, tłumnie rzuciliśmy się, by tematy przepisać i… Po raz pierwszy w życiu poczułem niesmak po przeczytaniu tematów zadań matematycznych. Na tym skończył się mój udział w XXIV OM.

***

Gdy byłem w III klasie, zadania okazały się dla mnie łatwiejsze. Rozwiązałem 10 z 12 i to pozwoliło mi znaleźć się wśród 117 uczestników zawodów II stopnia w okręgu krakowskim. To nie pomyłka, aż tyle osób wtedy zakwalifikowano! Punktualnie o 9^{00} podyktowano tematy, zaczęliśmy pisać… Po godzinie na sali powiało grozą, gdyż pewien chłopak w czerwonym swetrze z zadowoloną miną podszedł do stołu prezydialnego, oddał pracę i wyszedł. Wiedzieliśmy, kto to taki. Tuż przed zawodami starsi koledzy (na olimpiadzie zawsze znajdą się „bywalcy", którzy już brali w zawodach udział, wiele wiedzą i dzielą się wrażeniami z młodszymi) pokazali nam tego w czerwonym swetrze i poinformowali, że jest to laureat poprzedniej Olimpiady, który w tym roku „tylko o międzynarodowej olimpiadzie myśli". Po jego wyjściu z sali niejeden zastanawiał się, czy był w ogóle sens startować?

Z zadań tych zawodów najlepiej pamiętam ostatnie: *Dany jest ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ o własności: po odrzuceniu dowolnego wyrazu pozostałe można podzielić na takie dwie grupy po n wyrazów, że suma wyrazów w pierwszej grupie jest równa sumie wyrazów w drugiej. Dowieść, że wszystkie wyrazy ciągu są równe.* Zadanie (którego zresztą nie zrobiłem) wywarło na mnie wrażenie ze względu na przepiękne rozwiązanie pokazane na „herbatce olimpijskiej". Należało mianowicie zauważyć, że jeśli ciąg $\{b_i\}$ ma wspomnianą własność, to ciągi $\{b_i + k\}$ oraz $\{k \cdot b_i\}$ też ją mają i rozważyć ciąg $\{a_i - a_1\}$…

A kolega, który oddał prace tak szybko, mimo że był laureatem XXIV OM, w XXV OM nie zakwalifikował się do finału.

***

ponumerować formuły języka arytmetyki. Mianowicie – formuła jest ciągiem symboli alfabetu języka arytmetyki. Numerujemy więc symbole języka. Potem patrzymy na ciągi skończone symboli. Niektóre są poprawnie zbudowanymi formułami, inne zaś nie. Przypiszmy teraz ciągowi liczb $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ odpowiadających kolejnym symbolom liczbę $2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ (gdzie p_k jest k-tą liczbą pierwszą), która będzie numerem całego ciągu. Łatwo rozpoznać, kiedy liczba m jest kodem formuły arytmetycznej. Następnie, względnie łatwo rozpoznać, czy liczba jest kodem dla aksjomatu arytmetyki (żmudne to, ale oczywiście możliwe). Dalej, możemy kodować ciągi formuł jako liczby, i znowu łatwo (acz żmudnie) można rozpoznać, czy dana liczba koduje poprawny dowód. Teraz możemy napisać zdanie arytmetyczne $Con(PA)$, które mówi: „z aksjomatyki Peano nie da się wywieść formuły $0 = 1$". Otóż Gödel wykazał, że o ile arytmetyka Peano jest niesprzeczna, to $Con(PA)$ dowodu nie ma! Oczywiście, w teorii ZFC dowodzimy, że i negacja $(\neg Con(PA))$ dowodu w PA nie ma, bowiem PA ma model. W szczególności, arytmetyka Peano nie jest teorią zupełną. Twierdzenie to zachodzi w silniejszej jeszcze formie.

Mianowicie – żadne niesprzeczne rozszerzenie arytmetyki Peano o skończoną liczbę aksjomatów nie jest zupełne.
W licznych dziełach popularyzatorskich po dziś dzień pisze się o tym niezwykłym wyniku Gödla rzeczy wielce nieprawdziwe (na przykład takie, że Gödel wykazał, iż teorie zupełne nie istnieją).

Do czasu udowodnienia niezupełności arytmetyki (1931) wydawało się matematykom, że każdy problem dotyczący liczb naturalnych, a nawet każdy problem teorii mnogości da się rozwiązać na podstawie znanych już od jakiegoś czasu aksjomatów. Natomiast Gödel dowiódł, że pewne zdania arytmetyczne oraz ich negacje nie dadzą się udowodnić ani obalić, nawet w najsilniejszej znanej teorii, mianowicie teorii mnogości.

Oprócz zdania $Con(PA)$ znaleziono też różne własności teorioliczbowe albo kombinatoryczne niezależne od aksjomatyki Peano, w szczególności rozmaite uogólnienia twierdzenia Ramseya o kolorowaniu grafów. Dowody wielu z tych uogólnień wymagają metod analizy, a czasem i teorii mnogości. Co więcej, okazało się, że zdania takie wiążą się silnie z rozmaitymi aksjomatami „wielkich liczb kardynalnych". Badania Parisa, Solovaya i Friedmana dały wiele takich twierdzeń.