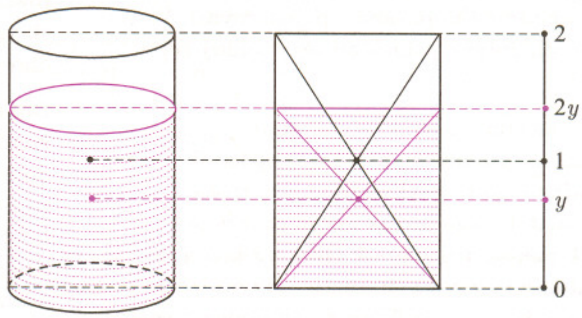
O problemie Lipniackiego i Wojciechowskiego

Marek KORDOS

Ponad pięć lat temu przypomniałem Czytelnikom niektóre, bardziej rekreacyjne problemy zawarte w *Księdze Szkockiej*. Przypomniała mi się ta sprawa w związku z przedrukowaniem tego artykułu w powstającym rosyjskim czasopiśmie o zasięgu światowym *Empire of Mathematics* (czyli Царство математики). Otóż poza „historycznymi” problemami z *Księgi* przytoczyłem tam tytułowy problem tej notatki, który brzmi:

przy jakiej ilości płynu w butelce środek ciężkości jest najniżej?

Przyjmując upraszczające założenia, biorąc mianowicie zamiast butelki walcową puszkę, nietrudno bardzo standardowymi środkami znaleźć rozwiązanie. Jak łatwo zauważyć (patrz rysunek), problem jest jednowymiarowy – jedynym parametrem położenia środka ciężkości jest wysokość płynu w puszce.



Przyjmijmy, że puszka ma wysokość i ciężar równe 2 (bez trudu można tak dobrać jednostki) i niech ciężar płynu w pełnej puszce będzie równy $2a$, a poziom płynu w puszce to $2y$. Środki ciężkości puszki i płynu będą leżały, odpowiednio, na wysokości 1 i y. Ponieważ środek ciężkości punktów materialnych (tu środków ciężkości puszki i płynu) to ich średnia ważona (mających wątpliwości odsyłam np. do *Delty* 6/1999), więc będzie on leżał na wysokości s, gdzie

$$s(y) = \frac{y \cdot 2ay + 1 \cdot 2}{2ay + 2} = \frac{ay^2 + 1}{ay + 1}.$$

Stosując szkolne standardy, obliczamy pochodną

$$s'(y) = \frac{2ay(ay+1) - a(ay^2+1)}{(ay+1)^2} = \frac{a(ay^2 + 2y - 1)}{(ay+1)^2},$$

skąd

$$s'(y_0) = 0 \text{ i } 0 \le y_0 \le 1 \iff ay_0^2 + 2y_0 - 1 = 0 \text{ i } 0 \le y_0 \le 1 \iff y_0 = \frac{\sqrt{1+a} - 1}{a}.$$

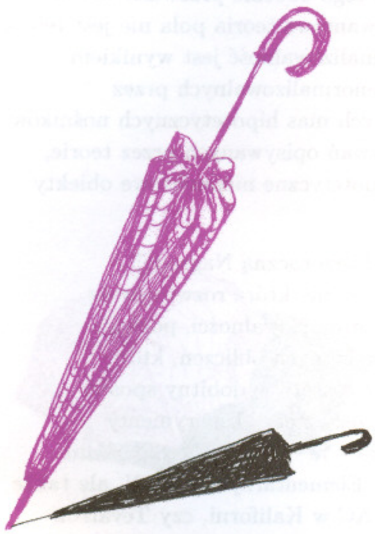
I przy takiej wysokości płynu środek ciężkości będzie leżał najniżej. Tylko co w tym ciekawego? Ciekawe będzie dalej. Obliczmy, gdzie konkretnie leży ten środek ciężkości:

$$s(y_0) = \frac{a\left(\frac{\sqrt{1+a}-1}{a}\right)^2 + 1}{\sqrt{1+a} - 1 + 1} = \frac{(\sqrt{1+a} - 1)^2 + a}{a\sqrt{1+a}} = \frac{1 + a - 2\sqrt{1+a} + 1 + a}{a\sqrt{1+a}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{(1+a) - \sqrt{1+a}}{a\sqrt{1+a}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{1+a} - 1}{a} = 2y_0,$$

czyli niezależnie od ciężaru właściwego płynu, środek ciężkości leży najniżej, gdy leży **na powierzchni płynu!**

A teraz jeszcze należałoby postawiony problem rozwiązać. Bo to, co zrobiliśmy wyżej, to wymuszenie wyniku. Skoro jednak wynik jest elegancki, to powinna być też do niego elegancka droga. Bardzo zachęcam do jej wytyczenia. Czekam na listy.



Rozwiązanie zadania M 904.
Ogólnie: Mamy $2n+1$ monet, wśród których jest $2k$ fałszywych, które różnią się masą od prawdziwych o 1 g (w tę lub drugą stronę, w zależności od monety). Monetę, o której chcemy stwierdzić, czy jest fałszywa, czy nie, odkładamy na bok. Pozostałe $2n$ monet dzielimy na dwie kupki po n monet i ważymy je. Jeśli strzałka wagi pokaże parzystą liczbę gramów, to oznacza to, że odłożona moneta jest prawdziwa, jeśli nieparzystą – fałszywa.