Klub 44

Regulamin

Weterani **Klubu 44 M** (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (4), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (5), P. Gadziński (6), K. Jedziniak, J. Olszewski, L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha, T. Józefczyk
(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie **Klubu 44 M** (alfabetycznie):
„dwukrotni":
Z. Bartold, W. Bednorz, A. Czornik, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Pióro, S. Solecki, J. Witkowski, G. Zakrzewski;
„jednokrotni":
W. Bednarek, T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, B. Dyda, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, P. Kubit, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Łazuka, J. Mańdziuk, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, K. Patkowski, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Weterani **Klubu 44 F**(w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma, P. Gworys, A. Idzik
(każdy z nich trzykrotnie przekroczył barierę 44 punktów).

Pozostali członkowie **Klubu 44 F** (alfabetycznie):
„dwukrotni":
J. Lipkowski, J. Łazuka, P. Perkowski, T. Wietecha;
„jednokrotni":
A. Borowski, P. Gadziński, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, A. Nowogrodzki, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, P. Wach, M. Wójcicki.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 7 i 8 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+2$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1999 upłynął 31 stycznia 2000). Szkicowe rozwiązania podawane są w numerze $n+4$.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. 4), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. **10**, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44 M** lub **Klubu 44 F**.

14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44 M** (lub **Klubu 44 F**) daje tytuł **Weterana Klubu 44 M** (**Klubu 44 F**).

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy uczestnik powiększy stan swojego konta.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka.

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian regulaminu.

Zadania z fizyki nr 292, 293

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2000

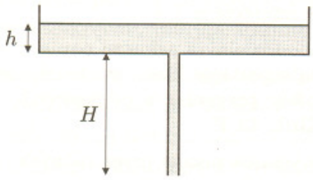
292. Jednorodna bryła ma kształt graniastosłupa prostego, którego podstawa jest n-kątem foremnym. Dla jakich n bryła ta może się toczyć po poziomej powierzchni, tzn. kiedy po zetknięciu ściany z podłożem będzie się dalej obracała w tę samą stronę, bez poślizgu? Można przyjąć, że siła działa ze strony podłoża tylko na kolejne krawędzie graniastosłupa i ma charakter niesprężysty, tzn. bryła nie podskakuje.

Pytanie poza konkursem: Jeśli n spełnia powyższy warunek, to ile wynosi podczas toczenia się bryły maksymalna liczba „przeskoków" od jednej krawędzi do następnej (uwarunkowana z jednej strony tym, aby bryła pokonała wzniesienie między przeskokami, a z drugiej strony tym, aby siła odśrodkowa nie oderwała jej od podłoża)? Pominąć straty energii poza przeskokami.

Idea zadania pochodzi od dr. Sławomira Brzezowskiego z Krakowa, a została przekazana przez jego uczniów – zwycięzców Olimpiady Fizycznej.

293. Po napompowaniu powietrza do komory ciśnieniowej w dolnej części ustawionej pionowo rury metalowej (rys. 1) zwolniono tłok, który został wyrzucony w górę (tłokiem tym może być zabawka, np. flara opadająca na spadochronie). Obliczyć wysokość osiąganą przez ciężarek o masie 0,4 kg, jeśli rura ma długość 2 m (z czego 75 cm zajmuje komora ciśnieniowa) i średnicę wewnętrzną 28 mm, ciśnienie atmosferyczne wynosi 10^5 Pa, a ciśnienie w komorze w chwili zwolnienia spustu – $5 \cdot 10^5$ Pa. Ponadto dana jest wartość stosunku ciepeł właściwych dla powietrza $\gamma = c_p/c_V = 1{,}4$.

Rys. 1



Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1999

Przypominamy treść zadań:

284. Wąską rurkę o długości H dołączono do otworu w dnie szerokiego naczynia, do którego nalano wody na głębokość h (rys. 2). Z jaką prędkością będzie wypływać z rurki woda?

285. Do źródła napięcia o okresowym przebiegu $U(t)$ przyłączono szeregowo opornik o oporności 100 Ω, zwojnicę o zmiennej indukcyjności L i amperomierz mierzący skuteczną wartość natężenia prądu I_{sk}. Dana jest tabela przedstawiająca zależność I_{sk} od L:

L [H]	0,03	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	1
I_{sk} [mA]	222	220	213	203	198	195	194

Podać wzór opisujący funkcję $U(t)$ i wartości parametrów występujących w tym wzorze.

Uwaga: odpowiedź może być niejednoznaczna, za prawidłowe będzie uważane każde rozwiązanie dające dobrą zgodność z tabelą.

284. Ciśnienie przy dnie naczynia jest równe sumie ciśnienia atmosferycznego p_0 i ciśnienia słupa wody $\rho g h$. Z drugiej strony, przy dolnym końcu rurki ciśnienie wynosi p_0, a więc aby znaleźć ciśnienie przy jej górnym końcu, należy od p_0 odjąć ciśnienie słupa wody $\rho g H$. Skok ciśnienia przy przejściu od naczynia do rurki wynosi zatem $\Delta p = \rho g(h+H)$ i jest związany ze skokową zmianą prędkości cieczy, gdyż praca wykonana przy przepływie objętości ΔV wody (równa $\Delta p \cdot \Delta V$) zgodnie z zasadą zachowania energii równa się zmianie energii kinetycznej cieczy, czyli $\rho \Delta V \cdot \Delta(v^2/2)$. Ponieważ prędkość wody w szerokim naczyniu jest praktycznie równa zeru, więc w rurce wynosi ona

$$v = \sqrt{2\Delta p/\rho} = \sqrt{2g(h+H)} \qquad \text{(równanie Bernoulliego).}$$

Założyliśmy, że ciecz jest nieściśliwa, a jej słup nie ulega rozerwaniu – zatem prędkość pozostaje w rurce stała.

285. Nie powiedzie się próba dopasowania danych do wzoru $I_{sk} = U_{sk}/\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$, który obowiązywałby, gdyby napięcie miało przebieg czysto sinusoidalny – nawet „na oko" widać, że dla dużych L natężenie prądu się ustala, a przy takim założeniu powinno maleć do zera. Wnioskujemy więc, że U ma co najmniej dwie składowe – stałą, która decyduje o wartości I_{sk} dla dużych L, i zmienną, odgrywającą pewną rolę dla małych L. Załóżmy, że

$$U(t) = U_0 + U_1 \sin(\omega t).$$

Natężenie prądu będzie w takim przypadku dane wyrażeniem

$$I(t) = I_0 + I_1 \sin(\omega t + \phi),$$

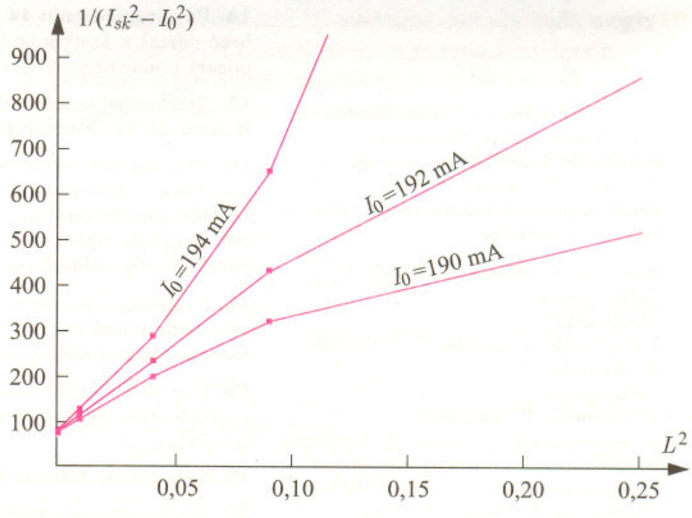
przy czym standardowe przekształcenia prowadzą do wzorów na I_0 i I_1:

$$I_0 = U_0/R, \qquad I_1 = U_1/\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}.$$

Następnie obliczamy I_{sk}:

$$I_{sk} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2/2}.$$

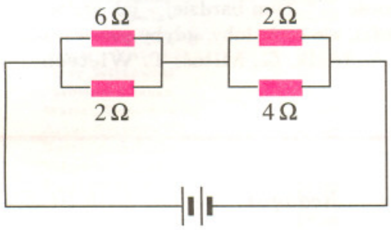
Na podstawie powyższych wzorów można się przekonać, że jeśli na osi x wykresu odłożymy L^2, a na osi y odłożymy $1/(I_{sk}^2 - I_0^2)$, to przy prawidłowym doborze I_0 punkty zaznaczone według tabeli będą się układać wzdłuż linii prostej. Na rysunku 3 przedstawiono takie wykresy dla trzech wartości I_0 równych 190 mA, 192 mA i 194 mA; zaznaczono przy tym punkty $L = 0{,}03$, 0,1, 0,2, 0,3 i 0,5 H. Jak widać, najlepiej pasowałby do linii prostej wykres odpowiadający wartości I_0 pomiędzy 192 a 194 mA. Niech więc $I_0 \approx 193$ mA, $U_0 \approx 19{,}3$ V. Punkt przecięcia prostej z osią pionową ($L = 0$) odpowiada $y = 1/(I_{sk}^2 - I_0^2) \approx 77\ \mathrm{A}^{-2}$, czyli $I_1 \approx 161$ mA, $U_1 \approx 16{,}1$ V. Ostatni parametr ω wyznaczymy z nachylenia prostej: czterokrotne zwiększenie y następuje dla $L^2 \approx 0{,}06\ \mathrm{H}^2$, $L \approx 0{,}24$ H, a z drugiej strony wzory dowodzą, że wtedy $L\omega = R\sqrt{3}$. Stąd $\omega \approx 720\ \mathrm{s}^{-1}$.



Rys. 3

1. Fotografując z brzegu jeziora o gładkiej powierzchni przeciwległy brzeg otrzymano obraz tego brzegu wraz z jego odbiciem w wodzie. W jaki sposób można odróżnić górę od dołu na zdjęciu, jeśli obie połowy nie różnią się pod względem ostrości ani jasności?

2. Który z oporników grzeje się najsilniej (ew. które – jeśli jednakowo)?



3. Transformatory mają zwykle po kilkaset zwojów w każdym z uzwojeń, np. 500 i 200. Ponieważ jednak we wzorze na przekładnię transformatora występuje tylko stosunek liczby zwojów, można by sądzić, że równie dobrze zwojów mogłoby być 50 i 20 lub nawet 5 i 2. Taki transformator spełniałby jednak swoje zadanie tylko pod warunkiem, że: a) natężenia prądów byłyby bardzo wielkie, b) natężenia prądów byłyby bardzo małe, c) napięcia byłyby bardzo wysokie, d) napięcia byłyby bardzo niskie, e) wszelkie inne ciała przewodzące zostałyby oddalone, aby rozproszone pole magnetyczne nie indukowało w nich prądów. Wybrać właściwą wersję i uzasadnić.

4. Aby zmierzyć temperaturę ciała za pomocą termometru rtęciowego, należy trzymać go pod pachą 5–10 minut. Po odczytaniu można go jednak strząsnąć praktycznie natychmiast. Dlaczego?

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 261 zadaniach

Zbigniew Galias	– Kraków	38,08
Tomasz Wietecha	– Tarnów	2- 37,76
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	1- 31,26
Aleksander Surma	– Myszków	3- 25,25
Artur Arciszewski	– Kielce	22,63
Jarosław Łazuka	– Warszawa	2- 20,19
Grzegorz Miłoś	– Mielec	17,14
Tomasz Rudny	– Warszawa	15,53
Marek Wójcicki	– Szczecin	1- 13,96
Jacek Konieczny	– Poznań	10,56
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	9,81

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1997–1999 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 9 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już **44** punkty.

Po raz drugi w ramach Festiwalu Nauki we wrześniu w Warszawie odbył się **Turniej Rozwiązywania Zadań z Fizyki** – firmowa impreza naszego czasopisma i **Klubu 44 F**. Uczestnicy bawili się znakomicie, raz i drugi żądając przedłużenia turnieju o dodatkowe zadanie. Zwycięzcą został **Tomasz Rudny** (zeszłoroczny zdobywca II miejsca), a dalsze miejsca zajęli pp. **Pielech**, **Sapierzyńska**, **Smólska** i **Zakrzewski** (bardzo przepraszamy, ale nie zanotowaliśmy imion). Nagrodami były programy komputerowe, modem i kalkulatory (m.in. graficzny i programowalny). Obok przedstawiamy niektóre z zadań turniejowych.

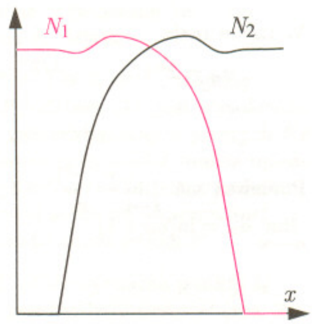
Jak co roku, przegląd przysłanych przez Czytelników rozwiązań zadań ligowych nasunął pewne dodatkowe komentarze:

Zadanie **262.** [Prędkość zerwanych końców drutu] (współczynnik trudności $WT = 2{,}20$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 3$). Bezbłędne rozwiązania nadesłali **A. Idzik** i **J. Łazuka**, natomiast przyjęte przez **M. Wójcickiego** założenie, że prędkość drutu maleje w miarę oddalania się od miejsca zerwania, jest niesłuszne (nie wpłynęło to jednak w dużym stopniu na wynik). Spadek naprężenia rozchodzi się bowiem wzdłuż drutu jako impuls nadający kolejnym elementom ośrodka jednakową prędkość – jest to ogólną cechą fal w ośrodku jednowymiarowym.

Zadanie **263.** [Minimalna dawka promieniowania pochodzącego od punktowego źródła, przy ustalonym początku i końcu drogi] ($WT = 2{,}14$, $LPR = 3$). Trudno oczekiwać od uczestników ligi znajomości rachunku wariacyjnego – dlatego zamiast polecenia „wyznaczyć drogę, dla której całkowita dawka jest minimalna" w zadaniu zamieszczono tylko żądanie rozpatrzenia wskazanej rodziny dróg i znalezienia jakiejkolwiek drogi korzystniejszej od nich (ale niekoniecznie optymalnej). Okazało się jednak, że spośród trzech poprawnych rozwiązań (**A. Idzika**, **J. Łazuki** i **M. Wójcickiego**) aż dwa są „perfekcyjne", tzn. zawierają rozwiązania równania Eulera rachunku wariacyjnego. Trzecie rozwiązanie ogranicza się natomiast do porównania dawek dla wybranej rodziny dróg, ale za to uwzględnia zmianę dawki wynikającą ze zjawiska Dopplera! Hm... z pewnością jest to niezbędne, jeśli prędkość podróżnika jest znaczącym ułamkiem prędkości cząstek promieniowania...

Zadanie **269.** [Siła odrzutu działająca na preparat promieniotwórczy osłonięty z jednej strony] ($WT = 2{,}53$, $LPR = 5$). Poprawne rozwiązania – **A. Idzik**, **J. Łazuka**, **M. Misiak**, **A. Nowogrodzki** i **A. Surma**, przy czym w jednym z nich wystąpił ciekawy błąd. Zadanie wymagało uśrednienia jednej składowej pędu względem kierunków emitowanej cząstki promieniowania, czyli obliczenia średniej wartości $\cos\theta$ względem kierunków w półprzestrzeni; otrzymuje się $\langle\cos\theta\rangle = 1/2$. Jeśli jednak uśrednić względem kierunków w półpłaszczyźnie (na tym polegał błąd Czytelnika), to wynikiem jest $\langle\cos\theta\rangle = 2/\pi$. A gdyby tak skonstruować silnik działający w przestrzeni czterowymiarowej?

Zadanie **270.** [Maksymalny ciężar, jaki można zawiesić na sznurku zamocowanym na końcach] ($WT = 2{,}28$, $LPR = 4$). Bezbłędne okazały się rozwiązania **A. Arciszewskiego**, **A. Idzika**, **J. Łazuki** i **M. Łupieżowca**, a ponadto kilka z nich zawierało analizę sięgającą dalej niż rozwiązanie wzorcowe. Tak więc **M. Łupieżowiec** wyznaczył *analitycznie* ekstrema funkcji wyrażającej szukany ciężar, co wymagało rozwiązania równania trzeciego stopnia, natomiast pozostali trzej wymienieni Czytelnicy zamieścili w swoich pracach wykresy przedstawiające napięcie sznurka w zależności od punktu zawieszenia ciężaru. **A. Idzik** przedyskutował jeszcze zmiany charakteru tego wykresu przy zmianach odległości między zamocowanymi końcami sznurka (parametr ten – nazwijmy go e – był ustalony i równy 0,87 długości sznurka). „Jasnym się dla mnie stało wyrachowanie Autora zadania" – napisał, no i trudno zaprzeczyć! Rzeczywiście, wybór e wziął się stąd, aby przebieg wykresu był „jak najciekawszy". Na przykład, przy małych wartościach e zadanie staje się banalne, gdyż najkorzystniejsze jest wtedy zawieszenie ciężaru w środku sznurka (wtedy napięcie każdej jego części jest równe w przybliżeniu połowie ciężaru), a najmniej korzystne – w pobliżu jednego z końców (wtedy ciężar wisi na jednej części, podczas gdy druga zwisa luźno).



Oznaczenia: x – odległość punktu zawieszenia od jednego z końców sznurka, N_1 i N_2 – napięcie jednej i drugiej części sznurka.

Zadanie **273.** [Poprawa izolacji cieplnej budynku] ($WT = 1{,}33$, $LPR = 8$). W rozwiązaniu nadesłanym przez **Z. Galiasa** zmieniona została treść zadania (inny jest więc wynik), ale fachowość komentarza przeważa nad wszystkim innym. Jak się dowiadujemy, zgodnie z Polską Normą PN–91 B–02020, współczynnik przenikania ciepła może być obliczony wg wzoru

$$k_0 = \frac{1}{R_i + \sum(d_j/\lambda_j) + R_e},$$

gdzie R_i i R_e są oporami przejmowania ciepła dla obu stron ściany...
No cóż, pozostaje schylić czoła przed autorytetem Polskiej Normy (ale jaki właściwie sens fizyczny ma, u licha, ten opór przejmowania ciepła?).

Zadanie **276.** [Wyznaczyć temperaturę wody i pary po ustaleniu się równowagi] ($WT = 2{,}20$, $LPR = 5$). Gdyby tak ogłosić konkurs na najbardziej zawiłą metodę rozwiązania prostego problemu, to niektóre rozwiązania zadania **276** miałyby duże szanse. Tym Czytelnikom, którzy rozpatrywali parowanie kolejnych partii wody w zmieniającej się temperaturze i pracowicie wyliczali numerycznie odpowiednie całki, należy zwrócić uwagę, że pomijali ciepło oddane przez wcześniej powstałą parę (zresztą ciepło właściwe pary nie było dane). Dobre (lub poprawne) rozwiązania: **A. Idzik**, **M. Wójcicki**, **G. Miłoś**, **T. Wietecha** i **A. Surma**.

Zadanie **281.** [Opór zastępczy sieci 18 oporników] ($WT = 2{,}23$, $LPR = 6$). Zacytujmy perełkę pochodzącą ze (skądinąd prawidłowego) rozwiązania przysłanego przez **A. Arciszewskiego**: „jeśliby prąd wpływający do obwodu posiadał świadomość..." Tym bardziej – jak sądzę – można by odwoływać się do jego poczucia przyzwoitości, ale co byłoby, gdyby przeważyła złośliwość albo perfidia? Pozostałe dobre rozwiązania: **A. Idzik**, **G. Miłoś**, **T. Wietecha**, **J. Łazuka** i **T. Rudny**.

Zadania z matematyki nr 395, 396

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2000

395. Liczby rzeczywiste $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2000}$ tworzą ciąg monotoniczny. Udowodnić, że

$$\sum_{k=0}^{2000}(-1)^k a_k^2 \geq \Big(\sum_{k=0}^{2000}(-1)^k a_k\Big)^2.$$

396. Dane są dwie przecinające się sfery oraz sześć różnych punktów A, B, C, D, E, F. Punkty A i B leżą na jednej z tych sfer, punkty C i D na drugiej; punkty E i F należą do obu sfer. Punkt E leży na odcinku AC, a punkt F leży na odcinku BD, który jest równoległy do prostej przechodzącej przez środki danych sfer. Dowieść, że rzuty prostokątne odcinków AB i CD na prostą AC mają jednakową długość.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1999

Przypominamy treść zadań:

387. Ciąg liczb dodatnich $a_0, a_1, a_2, \ldots$ spełnia zależność $2^{n+1}(a_{n-1} - a_n) = a_n^2$. Wykazać zbieżność i obliczyć granicę tego ciągu.

388. Dla ustalonej liczby naturalnej n rozwiązać równanie

$$\left(2 - \frac{1}{x_1}\right)\left(2 - \frac{1}{x_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(2 - \frac{1}{x_n}\right) = 3$$

w liczbach całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

387. Podstawienie $a_n = 2^n c_n$ sprowadza daną zależność rekurencyjną do postaci

$$(c_n + 1)^2 = c_{n-1} + 1.$$

Skoro liczby c_n są dodatnie, otrzymujemy łańcuszek równości

$$c_n + 1 = (c_{n-1} + 1)^{1/2} = (c_{n-2} + 1)^{1/4} = \ldots$$
$$\ldots = (c_0 + 1)^{1/2^n} = (a_0 + 1)^{1/2^n}.$$

W takim razie

$$a_n = 2^n\left((a_0 + 1)^{1/2^n} - 1\right) = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n}\cdot\ln(a_0 + 1),$$

$$\text{gdzie}\quad x_n = \frac{\ln(a_0 + 1)}{2^n}.$$

Ponieważ zaś $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, zatem, ostatecznie, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln(a_0 + 1)$.

388. Dla $n = 1$ mamy jedyne rozwiązanie $x_1 = -1$. Dla $n = 2$ równanie przybiera (po przekształceniu) postać $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = 3$ i ma cztery rozwiązania (x_1, x_2): $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$.

Przyjmijmy, że $n \geq 3$ i że liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają podane równanie. Jeśli $x_i = 1$, to $2 - (1/x_i) = 1$. Jeśli którać z liczb x_i jest różna od 1, to odpowiedni czynnik $2 - (1/x_i)$ jest większy lub równy $3/2$. Mogą być co najwyżej dwa takie czynniki; w przeciwnym razie ich iloczyn byłby większy od 3.

Uwzględniając wyniki uzyskane w przypadkach $n = 1$ oraz $n = 2$ stwierdzamy, że w przypadku ogólnym układ liczb całkowitych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest rozwiązaniem wtedy i tylko wtedy, gdy albo jedna z liczb x_i jest równa -1, a pozostałe 1, albo jedna z liczb x_i jest równa 3, jedna 5, a pozostałe są jedynkami.

Kolejny rok ligowy za nami. Kolejna okrągła liczba pojawiła się w statystyce ligowej: mamy już dwudziestu Weteranów ligi matematycznej. Może należałoby wprowadzić status „Super-weterana", chlubiącego się dwukrotnym wypełnieniem weterańskiej normy? Do tej pory tylko dwaj uczestnicy wykonali sześć czterdziestoczteropunktowych rund... Ciekawe, czy kiedykolwiek zostanie pobity rekord, ustanowiony już dość dawno przez **Jerzego Janowicza**, który swój udział w lidze rozpoczął od rozwiązania zadań z *Delty* 9/1981 (kiedy to liga właśnie wystartowała), aby po dwunastu latach nieprzerwanego uczestnictwa, zadaniami z numeru 10/1993 zamknąć ósme okrążenie.

Jak przed rokiem, spotkaliśmy się we wrześniu w Warszawie w gronie członków **Klubu 44 M**, którzy nie przerwali kontaktu z ligą. Także scenariusz spotkania był taki sam, jak rok temu: mieliśmy sesję „szybkiego rozwiązywania zadań" (otwartą dla publiczności i wkomponowaną w ciąg imprez III Festiwalu Nauki) oraz wysłuchaliśmy wykładu Zbigniewa Marciniaka o tym, jak język teorii grup pozwala elegancko formułować i dowodzić twierdzenia na temat zliczania kombinatorycznego.

A teraz omówienie wybranych zadań: co ciekawego zaprezentowali w swych rozwiązaniach uczestnicy ligi, jaka wpadka tym razem była udziałem prowadzącego ligę, które wreszcie zadania okazały się najtrudniejsze (minimalne liczby poprawnych rozwiązań).

Zestawienie na następnej stronie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1997, 1998 lub 1999.
Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Lista uczestników
ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 383 (WT=2,00) i 384 (WT=1,25)
z numeru 6/1999

Piotr Kumor	–	4-	46,20
Bogumiła Piotrowska	–		45,60
Krzysztof Zapisek	–		42,22
Janusz Olszewski	–	3-	37,91
Andrzej Daniluk	–		37,07
Rafał Pikuła	–		36,97
Zbigniew Galias	–	1-	35,12
Andrzej Jóźwik	–		34,12
Paulina Domagalska	–		34,09
Tomasz Wietecha	–	3-	33,66
Jerzy Witkowski	–	2-	33,22
Jarosław Łazuka	–	1-	31,44
Marian Łupieżowiec	–		31,29
Artur Arciszewski	–		29,56
Bartłomiej Dyda	–	1-	29,29
Nikodem Szpak	–		29,06
Bartłomiej Marczak	–		28,94
Krzysztof Jasek	–		27,47
Wojciech Maciak	–		27,26
Michał Adamaszek	–		26,73
Zbigniew Sewartowski	–		25,35
Mieczysław Jędrzejowski	–		24,99
Michał Lewandowski	–		22,96
Przemysław Gadziński	–	6-	22,39
Konrad Patkowski	–	1-	21,17
Andrzej Nagórko	–		21,10
Marek Prauza	–	3-	20,73
Marcin Peczarski	–		20,12

Legenda (przykładowo): stan konta 6-22,39 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 22,39 punktów.

Dwóch uczestników w tej kolejce ligowej przekroczyło próg 44 punktów: B. Piotrowska – po raz pierwszy, a Weteran P. Kumor – po raz piąty(!).

Zadanie **367.** [Układ równań w liczbach nieujemnych: $\sqrt{a+x}+\sqrt{b+y}+\sqrt{c+z}=1$; $\sqrt{a+y}+\sqrt{b+z}+\sqrt{c+x}=1$; $\sqrt{a+z}+\sqrt{b+x}+\sqrt{c+y}=1$; dowieść, że $a=b=c$ lub $x=y=z$] (współczynnik trudności WT=2,71; liczba poprawnych rozwiązań LPR=3). **P. Kumor** proponuje interpretację geometryczną: składniki rozważanych sum to długości odcinków łączących punkty $(\sqrt{a},0)$, $(\sqrt{b},0)$, $(\sqrt{c},0)$ z punktami $(0,\sqrt{x})$, $(0,\sqrt{y})$, $(0,\sqrt{z})$, w trzech permutacjach; tezę uzyskuje rozważając kilka przypadków i korzystając z tego, że w niezdegenerowanym czworokącie wypukłym suma długości przekątnych jest większa niż suma długości dwóch przeciwległych boków.

Pozostałe dwa dobre rozwiązania: **K. Patkowski** (nie prostsze od firmowego) i **J. Witkowski** (analogiczne do firmowego).

Zadanie **370.** [Losowanie ze zwracaniem liczb $x_1,\ldots,x_k$ ze zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$; obliczyć wartość oczekiwaną $\prod x_i$ pod warunkiem $(\sum x_i = n)$] (WT=3,17; LPR=3). Oznaczając badaną wartość oczekiwaną przez $E(n,k)$ można uzyskać zależność rekurencyjną:

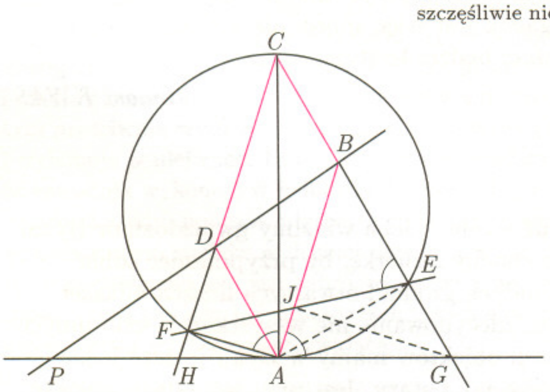
$$E(n,k)=\binom{n-1}{k-1}^{-1}\sum_{i=1}^{n}\binom{n-i-1}{k-2}iE(n-i,k-i);$$ w takiej postaci podaje ją **K. Patkowski**;

a w postaci nieznacznie się od tego różniącej – **A. Nagórko**. Ostateczny wynik $E(n,k)=\binom{n-1}{k-1}^{-1}\binom{n+k-1}{2k-1}$ otrzymuje się stąd przez indukcję. Trzecie dobre rozwiązanie (**M. Mostowski**) też sprowadza się do schematu indukcyjnego.

Zadanie **371.** [$x_1\geq\ldots\geq x_n\geq 0$; $\sum x_k=1$, $\sum\sqrt{k}(\sqrt{x_k}-\sqrt{x_{k+1}})=1$; $(x_1,\ldots,x_n)=?$] (WT=2,45; LPR=3). Szukane układy mają postać $(a,a,\ldots,a,0,0,\ldots,0)$, gdzie a jest liczbą tak dobraną, by $\sum x_k=1$. **P. Kumor** dowodzi tego przez indukcję względem n; **M. Kasperski** – jak w rozwiązaniu firmowym.

B. Dyda zauważa, że zbiór $A\subset\mathbf{R}^n$, określony przez warunki $x_1\geq\ldots\geq x_n\geq 0$ oraz $\sum x_k=1$, jest zwarty i wypukły, po czym sprawdza, że suma występująca w ostatnim warunku zadania określa funkcję $A\to\mathbf{R}$, ciągłą i ściśle wklęsłą; taka funkcja musi przyjmować w pewnych punktach zbioru A swoją wartość minimalną; a może ją przyjąć tylko w punktach ekstremalnych zbioru A, którymi są właśnie punkty wymaganej postaci; w tych zaś punktach przyjmuje wartość 1; stąd teza. (Punkt ekstremalny zbioru wypukłego – to punkt nie będący kombinacją wypukłą żadnej pary innych punktów tego zbioru.)

Zadanie **380.** [Maksymalne pole trójkąta równobocznego wpisanego w prostokąt o zadanych bokach] (WT=2,40; LPR=10). Zadanie, jak widać, niezbyt trudne; dość dużo poprawnych rozwiązań – mniej lub bardziej rachunkowych. Ze skruchą trzeba się przyznać, że rozwiązanie firmowe nie kwalifikuje się do kategorii „rozwiązań poprawnych" – gubi bowiem przypadek, gdy dwa wierzchołki trójkąta leżą na dwóch krótszych bokach prostokąta. To przegapienie szczęśliwie nie wpłynęło na końcowy wynik, ale luka jest niewątpliwa.

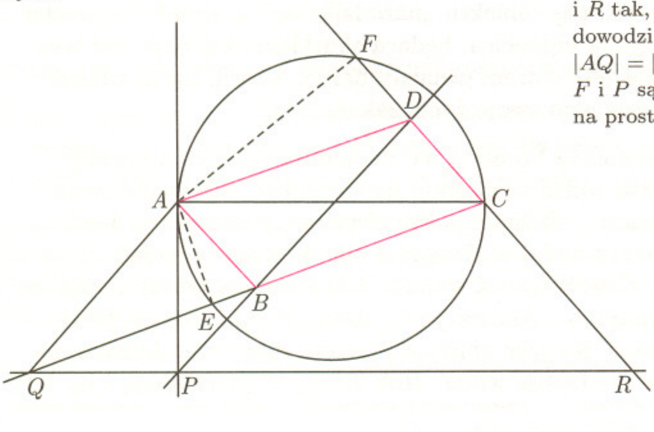


Rys. 1

Zadanie **383.** [$ABCD$ – równoległobok z ostrym kątem A; okrąg o średnicy AC przecina proste CB i CD w punktach E i F; styczna do okręgu w punkcie A przecina BD w punkcie $P\Rightarrow$ punkty E, F, P są współliniowe] (WT=2,00; LPR=18). Wiele ciekawych metod. Bardzo zgrabne rozwiązanie, używające prostych środków, przedstawili **W. Bednorz** oraz **A. Idzik**:

Prosta AP przecina proste CB i CD w punktach G i H (rys. 1); trójkąty HAD i AGB są jednokładne względem punktu P, odcinek AF jest wysokością w pierwszym z tych trójkątów. Niech J będzie punktem przecięcia prostych EF i AB; $|\angle BEJ|=|\angle CAF|=|\angle JAG|$, więc na czworokącie $AGEJ$ można opisać okrąg; wobec tego $|\angle AJG|=|\angle AEG|=90°$, czyli odcinek GJ jest wysokością w trójkącie AGB. Zatem punkty F i J odpowiadają sobie we wspomnianej jednokładności; a to znaczy, że prosta EF przechodzi przez punkt P.

Inaczej rozumuje **Ł. Kamiński**: na prostych CE i CF wyznacza punkty Q i R tak, by prosta QR była równoległa do AC i przechodziła przez P (rys. 2); dowodzi następnie (pominiemy tu szczegóły, nietrudne do uzupełnienia), że $|AQ|=|CR|$, skąd wniosek, że punkty A, C, Q, R leżą na okręgu; punkty E, F i P są rzutami prostokątnymi punktu A na proste CQ, CR i QR, więc leżą na prostej Simsona punktu A względem trójkąta CQR.



Rys. 2

Rozwiązanie oparte na twierdzeniu Menelausa (podobne do firmowego) przysłał **A. Nagórko**. Pozostałe poprawne rozwiązania – albo znacznie bardziej skomplikowane pojęciowo, albo uciążliwie rachunkowe.

Zadanie **384.** [p – liczba pierwsza, $p\nmid n\ \Rightarrow\ n\,|\,p^{n!}-1$] ($WT$=1,25; LPR=24). Większość rozwiązań sprowadza się do spostrzeżenia, że w myśl twierdzenia Eulera $p^{\phi(n)}\equiv 1 \pmod{n}$, gdzie $\phi(n)$ jest liczbą elementów zbioru $\{1,\ldots,n\}$, pierwszych względem n, a więc liczbą mniejszą od n, a więc dzielnikiem liczby $n!$; stąd natychmiast wynika, że $p^{n!}\equiv 1 \pmod{n}$.