4/00 (28)

Γ-limatias

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (21′)

Wyjaśnienie oszustwa (21): Nie jest prawdą, że z kongruencji $a^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\, n)$ wynika $a \equiv \pm 1(\mathrm{mod}\, n)$.

Z podzielności $n|a^2-1$, czyli $n|(a+1)(a-1)$, nie wynika wcale, że musi zachodzić jedna z podzielności $n|a+1$ lub $n|a-1$. Takie wynikanie zachodzi wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą lub potęgą nieparzystej liczby pierwszej, nie jest jednak prawdziwe w ogólnym przypadku.

Przyjmijmy $n = 21$ i prześledźmy dowód twierdzenia. Wówczas $r = 6$, gdyż $2^6 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 21)$, ale nie jest prawdą, że $2^3 \equiv \pm 1(\mathrm{mod}\, 21)$. Zatem podane twierdzenie jest fałszywe dla $n = 21$.

JWR

GRY (12)

Podstawowym dla rozwijanej przez nas teorii gier jest następujący fakt, który przytoczymy bez dowodu:

Każda gra jest równoważna jednej z gier 0, 1, 2, 3, 4, ..., tzn. pewnej grze *Nim* złożonej z jednego stosu.

Oznacza to, że każdej grze możemy przypisać liczbę całkowitą nieujemną (zwaną liczbą Grundy'ego gry), która *pamięta* wszystkie istotne dla nas informacje o danej grze. Przy tym podkreślić należy, że gry 0, 1, 2, 3, 4, ... są parami nierównoważne. Tak więc badanie równoważności gier sprowadza się do porównywania ich liczb Grundy'ego. Liczbę Grundy'ego gry G oznaczać będziemy przez $g(G)$. Oczywiście dla gier $k \in \{0,1,2,3,4,\ldots\}$ zachodzi równość $g(k) = k$.

Gry o liczbie Grundy'ego 0 są grami, w których strategię wygrywającą ma drugi gracz (tzn. ten, który gry nie rozpoczyna), natomiast gracz rozpoczynający może wygrać każdą grę o liczbie Grundy'ego różnej od 0. W każdej grze strategia wygrywająca polega na podawaniu przeciwnikowi pozycji, których liczba Grundy'ego jest równa 0.

Istnieje prosta procedura określania liczby Grundy'ego danej gry na podstawie znajomości liczb Grundy'ego jej opcji (tzn. gier będących pozycjami, do których można przejść w pierwszym ruchu). Jeśli $G = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$, to $g(G)$ jest najmniejszą liczbą całkowitą nieujemną, która **nie występuje** wśród liczb $g(G_1)$, $g(G_2)$, ..., $g(G_n)$.

Do tego dodać należy sposób obliczania liczby Grundy'ego sumy gier: $g(G \oplus H) = g(G) +_2 g(H)$.

Masz już pewnie dosyć tego suchego wykładu o grach, Drogi Czytelniku, prześledźmy więc, jak cała ta teoria działa w przypadku konkretnej gry, którą nazwiemy RÓŻNE STOSY. Na czym polega ta gra? Na początku gry jest jeden stos złożony z pewnej liczby bierek. Jak zwykle dwaj gracze wykonują na przemian ruchy. Ruch polega na wybraniu dowolnego stosu i rozdzieleniu go na dwa niepuste stosy różnej liczności. Zgodnie z ogólnie przyjętą przez nas zasadą, że brak możliwości wykonania ruchu oznacza przegraną, gra kończy się w momencie, gdy jeden z graczy otrzyma od przeciwnika pozycję złożoną tylko ze stosów jedno- i dwubierkowych.

Niech $r(n)$ oznacza liczbę Grundy'ego gry RÓŻNE STOSY rozpoczynającej się od jednego stosu złożonego z n bierek.

Spróbujmy obliczyć wartości $r(n)$ dla początkowych liczb naturalnych n.

Dla $n < 3$ mamy jeden stos złożony z jednej lub dwóch bierek. Nie można go podzielić na dwa różne stosy, więc nie istnieje legalny ruch w tej grze, zatem $r(1) = r(2) = 0$. Gracz, który ma grę rozpoczynać, przegrywa od razu.

$n = 3$. Jest tylko jeden legalny ruch: podział stosu na dwa stosy mające odpowiednio jedną i dwie bierki. Liczba Grundy'ego pozycji złożonej z dwóch stosów o licznościach 1 i 2 wynosi $r(1) +_2 r(2) = 0 +_2 0 = 0$. Zbiór liczb Grundy'ego opcji gracza rozpoczynającego jest więc jednoelementowy: $\{0\}$. Przy tym $r(3)$ jest najmniejszą liczbą nieujemną, która nie występuje w tym zbiorze, zatem $r(3) = 1$.

Dla $n = 4$ jedyny legalny ruch prowadzi do pozycji złożonej ze stosów o licznościach 1 i 3. Ponieważ $r(1) +_2 r(3) = 0 +_2 1 = 1$, więc $r(4) = 0$.

Przy $n = 5$ są już dwa legalne ruchy, a mianowicie podział na stosy 1 i 4 (z liczbą Grundy'ego $r(1) +_2 r(4) = 0$) oraz podział na stosy 2 i 3 (z liczbą Grundy'ego 1). Tak więc $r(5) = 2$.

W podobny sposób można stwierdzić, że $r(6) = 1$, $r(7) = 0$, $r(8) = 2$, $r(9) = 1$ oraz $r(10) = 0$.

Dla przykładu prześledźmy przypadek $n = 8$. Możliwe są trzy ruchy rozpoczynające grę, prowadzące do pozycji

1 i 7	0
2 i 6	1
3 i 5	3

z liczbami Grundy'ego podanymi obok liczności stosów. Liczba 2 jest najmniejszą liczbą, która nie występuje wśród liczb 0, 1 i 3.

I na koniec zadanie dla Czytelników. Siadasz do gry RÓŻNE STOSY z mało doświadczonym przeciwnikiem, więc dajesz mu fory w postaci pierwszego ruchu. Przeliczasz bierki w stosie, jest ich 37. Niedobrze, myślisz, przeciwnik ma aż 5 dobrych posunięć w pierwszym ruchu (**jakich?**). Oddychasz z ulgą, gdy przeciwnik dzieli wyjściowy stos na stosy o licznościach 17 i 20. Teraz wygraną masz w kieszeni. Jaki jest Twój ruch?

Odpowiedź za miesiąc.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl