

Determinizm, chaos i fraktale

Grzegorz ŚWIĄTEK

W latach 1605 i 1618 Jan Kepler opublikował swoje trzy prawa ruchu planet. Te proste reguły pozwoliły wyjaśnić ruchy planet na niebie w granicach błędu obserwacji, wieńcząc wysiłki uczonych od Arystarcha z Samos po Kopernika. W roku 1687 Izaak Newton wykazał, że postulowane przez niego prawo grawitacji powszechnej, przy założeniu, iż oddziaływania między planetami można zaniedbać, prowadzi do jednego prawa ruchu planet, wyrażonego przez równanie różniczkowe

$$(1) \quad \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = -\frac{GM\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^3},$$

które implikuje trzy prawa Keplera. W równaniu tym $\mathbf{X}(t)$ oznacza położenie planety w chwili t , Słońce z założenia jest w początku układu współrzędnych, a G i M są stałymi. Prawo powszechnego ciężenia dało początek nowej gałęzi nauki, zwanej mechaniką nieba. Jednym z problemów mechaniki nieba było przewidywanie trajektorii planet w sytuacji, gdy oddziaływań międzyplanetarnych nie można zaniedbać. Odpowiednim narzędziem okazał się tzw. rachunek zaburzeń, który wprawdzie nie dostarczał dokładnego rozwiązania, ale pozwalał wyznaczyć ciąg coraz dokładniejszych przybliżeń orbity. Rachunek zaburzeń odniósł spektakularny sukces w roku 1846, kiedy to obliczenia oparte na anomaliach ruchu Urana pozwoliły na dokładne przewidzenie położenia na niebie nieznanego uprzednio planety – Neptuna. Osiągnięcia te doprowadziły do umocnienia się poglądu zwanego *klasycznym determinizmem*. Głosi on, że znajomość praw ruchu i stanu układu w chwili początkowej pozwala na przewidzenie jego przyszłości. Matematycznym wyrazem determinizmu jest równanie różniczkowe. Jeśli \mathbf{y} jest zależnym od czasu wektorem w przestrzeni \mathbb{R}^n , to równanie różniczkowe ma ogólną postać

$$(2) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = F(\mathbf{y}, t).$$

To jedno równanie wektorowe oznacza układ n równań skalarnych. Aby zapisać w tej formie równanie (1), musimy użyć wektora \mathbf{y} o sześciu składowych, z których pierwsze trzy są składowymi \mathbf{X} , trzy następne zaś składowymi wektora prędkości $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$. Ta, w tym przypadku sześciowymiarowa, przestrzeń wektorów \mathbf{y} jest zwana *przestrzenią fazową* układu, w odróżnieniu od trójwymiarowej *przestrzeni konfiguracyjnej* wektorów x . Dla przykładu, dwa spośród sześciu otrzymanych w ten sposób równań skalarnych mają postać

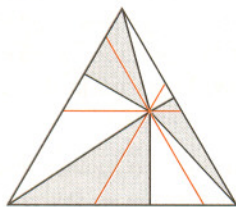
$$\frac{dy_1}{dt} = y_4 \quad \text{oraz} \quad \frac{dy_4}{dt} = -\frac{GM y_1}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{3/2}}.$$

Odpowiednie twierdzenia teorii równań różniczkowych orzekają, że o ile F jest „rozsadną” funkcją, na przykład mającą ciągle pochodne cząstkowe względem wszystkich argumentów, to przy zadaniu warunku początkowego $\mathbf{y}(t_0)$ w dziedzinie funkcji F istnieje jednoznaczne rozwiązanie spełniające ten warunek, które można przedłużać w obie strony w czasie tak długo, jak pary $(\mathbf{y}(t), t)$ pozostają w dziedzinie funkcji F . Ze względu na ogólną postać równania (2) klasyczny determinizm nie ograniczył się do problemów z mechaniki nieba. Sądzono, że gdyby znać początkowe położenia i prędkości wszystkich atomów i uwzględnić oddziaływania grawitacyjne, elektrostatyczne i magnetyczne między nimi, można by również przewidzieć inne zdarzenia, włącznie z działaniami ludzkimi pozornie podlegającymi wolnej woli. Ten ostatni pogląd nie budzi sympatii w świetle doświadczeń historii dwudziestego wieku. Z drugiej strony, ogromny postęp techniki obliczeniowej wydawałby się sprzyjać celom klasycznego determinizmu. Jego krytyka ze strony mechaniki kwantowej, znajdująca swój wyraz w polemice między Bohrem i Einsteinem, jest zapewne wielu Czytelnikom znana. Nie dotyczy ona jednak, jak się wydaje, mechaniki nieba, ponieważ efekty kwantowe dotyczą małych mas i odległości. Mniej znany jest atak na klasyczny determinizm ze strony czysto matematycznej. Zanim przedyskutuję tę krytykę, chciałbym wspomnieć epizod z mojego dzieciństwa.



Rozwiązanie zadania M 919.

Rozważany trójkąt rozcinaamy trzema prostymi równoległymi do boków trójkąta i przechodzącymi przez wybrany punkt.



Otrzymamy w ten sposób trzy trójkąty równoboczne i trzy równoległoboki. Każda z tych sześciu figur zawiera część zacieniowaną o polu równym części niezacieniowanej.

W latach siedemdziesiątych w ramach programu Apollo został przeprowadzony eksperyment: człon rakiety zrzucono na powierzchnię Księżyca. Wywołało to wielki niepokój mojej Babci, która obawiała się zaburzenia porządku niebios i końca świata. Jak będę się starał wykazać w tym artykule, obawy te nie były nierozsądne.

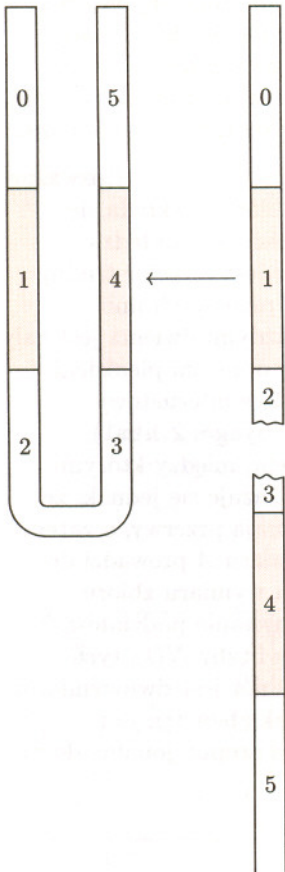
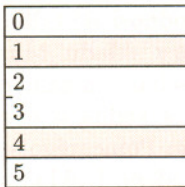
W latach 1889–1899 francuski matematyk, Henri Poincaré, opublikował wyniki swoich badań nad mechaniką nieba. Postawił on tak zwany problem trzech ciał, to jest trzech mas punktowych oddziałujących grawitacyjnie w myśl zasad klasycznej mechaniki Newtona. Jest to więc minimalne uogólnienie problemu dwóch ciał, rozwiązane przez Keplera i Newtona. Zagadnienie trzech ciał prowadzi do równania różniczkowego w osiemnastowym wymiarowej przestrzeni fazowej. Równanie to ma rozwiązanie jednoznaczne przy zadaniu warunków początkowych. Poincaré zauważył jednak, że rozwiązanie to jest niemożliwe do otrzymania nawet w przybliżeniu. Próba użycia rachunku zaburzeń doprowadziła go do odkrycia, że ciąg przybliżeń jest rozbieżny już dla niewielkich czasów. Nie ma też nadziei na odgadnięcie „wzoru” na rozwiązanie, bowiem Poincaré wykazał, iż rozwiązanie nie rozwija się w szereg potęgowy. Jedyna szansa może leżeć w numerycznym rozwiązywaniu równania. Opcja ta jest bardziej atrakcyjna dla nas, mających do dyspozycji potężne komputery, niż była dla Poincarégo. Bliższa analiza ukazuje jednak, że takie numeryczne rozwiązania mogą być bardzo dalekie od dokładnych.

Aby zrozumieć to zjawisko, przemyśmy dokładniej mały wycinek pracy Poincarégo, polegający na analizie zaburzeń rozwiązań okresowych. Na przykład orbita Ziemi nie jest dokładnie okresowa, ale mogą istnieć orbity okresowe zbliżone do niej. Dla zrozumienia takich zaburzonych orbit Poincaré przeciął wyjściową orbitę okresową ω prostopadłą do niej hiperpłaszczyzną P . Ta hiperpłaszczyzna może przecinać orbitę ω w kilku punktach; wybierzmy jeden z nich, O . Rozpatrzmy orbitę bliską ω , która z reguły nie jest już okresowa, i przecina P w punkcie \mathbf{X} bliskim O . Po czasie bliskim okresowi ω orbita ta znów przetnie P w punkcie bliskim O , który oznaczamy przez $H(\mathbf{X})$. Otrzymujemy w ten sposób przekształcenie H z punktem stałym O . Badanie kolejnych powrotów orbit do P sprowadza się do iterowania H , tj. składania go z samym sobą. Poincaré zauważył, że iteracje H mogą prowadzić do niezwykle skomplikowanych zachowań. W szczególności, można w dziedzinie H znaleźć obszar, który jest przez H ściśnięty w pewnych kierunkach, rozciągnięty w innych, zgięty i odwzorowany tak, że jego obraz przecina wyjściowy obszar. Uproszczoną ilustracją H na takiej poddziedzinie jest podkowa Smale'a pokazana na rysunku.

Przekształcenie H jest tu obcięte do kwadratu jednostkowego, który jest odwzorowany w płaszczyznę tak, iż górny pasek poziomy przechodzi afinicznie na lewy pasek pionowy, dolny pasek poziomy zaś na prawy pasek pionowy. Zapiszmy współrzędne punktu \mathbf{X} w układzie szóstkowym, jako $(0, v_1 v_2 \dots, 0, h_1 h_2 \dots)$. Jeśli \mathbf{X} jest taki, że $H(\mathbf{X})$ jest znów w kwadracie, to h_1 równe jest 1 lub 4. Przekształcenie H jest określone tak, że jeśli $h_1 = 1$, to $H(\mathbf{X}) = (0, 1 v_1 h_2 \dots, 0, h_2 h_3 \dots)$, gdy natomiast $h_1 = 4$, to

$$H(\mathbf{X}) = (1, 1) - (0, 1 v_1 v_2 \dots, 0, h_2 h_3 \dots).$$

O ile $H(\mathbf{X})$ jest znów w kwadracie, to możemy dalej stosować H . Ta procedura nazywa się iterowaniem H i jest możliwa tak długo, dopóki obrazy punktu pozostają w dziedzinie, tj. w kwadracie. Chcąc przewidywać przyszłość punktu \mathbf{X} pod działaniem kolejnych iteracji H , musimy znać kolejne cyfry h_n . Pomiar położenia \mathbf{X} z dokładnością do 10^{-20} , co odpowiada skali molekularnej w odniesieniu do odległości między planetami, daje 26 cyfr szóstkowych ($20 / \log_{10} 6$). Aby przewidzieć przyszłość na tysiąc iteracji, trzeba by znać \mathbf{X} z błędem nie przekraczającym 10^{-700} . Zakładając znajomość początkowego położenia \mathbf{X} z dokładnością do 10^{-20} , spróbujmy przewidzieć, czy obrazy jego pozostaną w kwadracie przez 30 iteracji.



Być może nasza znajomość pierwszych 26 cyfr wykaże, iż któraś z nich jest inna niż 1 lub 4. Wówczas możemy odpowiedzieć, że nie. Jeśli jednak taka analiza wykaże, że punkt pozostaje w kwadracie przez 26 iteracji, to prognozę postawić możemy tylko w terminach prawdopodobieństwa. Każda z następnych czterech cyfr jest 1 lub 4 z prawdopodobieństwem $1/3$, a zatem punkt pozostanie w kwadracie przez kolejne cztery iteracje z prawdopodobieństwem $(1/3)^4$. W ten sposób podkowa Smale'a, która z jednej strony jest prostym układem deterministycznym, poza krótkimi czasami zachowuje się w sposób losowy. Deterministyczne wnioskowanie zakłada niemożliwą w praktyce idealną znajomość warunków początkowych, przy skończonej zaś, choćby ogromnej, dokładności już dla stosunkowo niewielkich czasów zachowanie układu daje się najlepiej opisać jako losowe. Układy tego typu zwane są *chaotycznymi*.

Powtórzmy jeszcze raz, że problem trzech ciał zawiera w sobie podkowy Smale'a jako niewielkie wycinki. Właściwie zawiera ich nieliniowe i wyżej wymiarowe wersje, co oczywiście tylko powiększa chaotyczność układu. Poza tym, w rozwiązywaniu problemów mechaniki nieba niewielkie błędy wypływają nie tylko z ograniczonej dokładności ustalenia warunków początkowych, lecz również z błędów arytmetyki komputera oraz zaniedbania efektów oddziaływania sąsiednich gwiazd, a nawet działań ludzkich w rodzaju tych, które niepokoiły Babcie. Czy może istotnie dojść do wielkiej katastrofy w rodzaju zderzenia dwóch planet lub wyrzucenia jednej z nich poza Układ Słoneczny? Dowód oparty o mechanikę nieba byłby bardzo trudny. W chwili obecnej matematycy skłaniają się do poglądu, że takich katastrof w długiej perspektywie czasowej należy oczekiwać. Pogląd przeciwny, stabilność Układu Słonecznego, głosiłby, że cała nieprzewidywalność, o której mówiliśmy, odnosi się tylko do ruchów w ograniczonej skali i nie zaburza ogólnej struktury układu. Musiałoby to być spowodowane przez jakiś nieznaną jeszcze mechanizm samoregulacyjny. Teoria nie dostarcza rozstrzygającego argumentu w żadną stronę. Natomiast orbit obliczonych na komputerach dotyczy krytyka Poincarégo sugerująca, iż są one obarczone nie dającym się oszacować błędem. Dokładniej, dla stosunkowo krótkich czasów błąd daje się oszacować, ponieważ komputer może wyznaczać wiązkę rozwiązań, wśród których na pewno znajduje się prawdziwe. Tego typu obliczenia sugerują, że do wielkiej katastrofy nie dojdzie w ciągu paru najbliższych milionów lat. Nieuchronnie jednak, i niezależnie od mocy komputera, przy przedłużaniu rozwiązania w przyszłość wiązka taka w tempie wykładniczym się rozszerza i w końcu przestaje być użyteczna jako prognoza.

Przedyskutujmy na koniec geometryczne aspekty podkowy Smale'a. Rozważmy zbiór punktów A , które nigdy nie opuszczą podkowy. Zbiór ten składa się z punktów, których współrzędna pionowa może być zapisana w układzie szóstkowym przy użyciu tylko cyfr 1 i 4. Geometrycznie jest to zbiór trudny do przedstawienia, składający się z nieskończenie wielu pionowych linii. Pomimo iż linii tych jest nieskończenie wiele, między każdymi dwiema jest cały pasek rozłączny z A . Nasuwa się tu analogia ze znanym obrazem pierścieni Saturna (zainteresowany Czytelnik może zajrzeć pod adres internetowy <http://ringmaster.arc.nasa.gov/saturn/voyager/voyager2.html>). Pierścienie te nie są jednolite: składają się z podpierścieni, między którymi są przerwy. W miarę rozwoju technik obserwacyjnych okazuje się jednak, że nawet te podpierścienie, które wydawały się jednolite, mają przerwy, a zatem ich struktura przypomina zbiór A . Próba ustalenia wymiaru A prowadzi do ciekawego rezultatu. Jednym ze sposobów zdefiniowania wymiaru zbioru, powiedzmy zawartego w kwadracie o boku a , jest dokonywanie podziałów tego kwadratu na małe kwadraty o boku a/k i ustalenie liczby $N(k)$ tych kwadratów, które przecinają niepusto nasz zbiór. Jeśli zbiór jest dwuwymiarowy, $N(k)$ powinno być w stałej proporcji do k^2 . Jeżeli jednak zbiór ten jest jednowymiarową krzywą, to oczekujemy, że $N(k)$ będzie proporcjonalne do k . Liczba

$$(3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(k)}{\log k},$$

o ile istnieje, ma więc interpretację wymiaru zbioru. Zastosujmy tę metodę do



ustalenia wymiaru zbioru A z podkwy Smale'a, przyjmując $k = 6^j$. Wówczas $N(k) = 2^j 6^j = 12^j$. Wskazuje to na wymiar $\log 12^j / \log 6^j = \log 12 / \log 6 = 1 + \log_6 2$. Nieco bardziej wyrafinowane rachunki wykazują, że granica (3) faktycznie istnieje. Wymiar jest zawarty między 1 a 2, co odpowiada temu, że zbiór A jest za mały jak na dwa wymiary, lecz za duży na jeden. Zbiory o wymiarze różnym od liczby całkowitej zwane są *fraktalami*. Fraktale mają często własność samopodobieństwa polegającą na tym, że ich wycinki w dowolnie małych skalach po powiększeniu są podobne do całego zbioru. Ma tę własność zbiór A , w którym deseń, składający się z linii i dziur, powtarza się we wszystkich skalach. Współczesny matematyk, Benoit Mandelbrot, znajduje fraktale w wielu zjawiskach naturalnych i modelach matematycznych. Wspomniałem, na przykład, o analogii z pierścieniami Saturna. Wyjaśnieniem powszechnej obecności fraktali może być fakt, że są one generowane przez chaotyczne układy dynamiczne. Być może są to spekulacje. Niewątpliwie jednak popularyzacja fraktali przyczyniła się do lepszego zrozumienia teorii układów dynamicznych przez naukowców z innych dziedzin, jak i przez szersze kręgi społeczeństwa. Efektowne obrazy fraktali generowanych przez nieliniowe chaotyczne układy dynamiczne można znaleźć w Internecie pod adresem <http://www.cnam.fr/fractals/mandel11.html>.



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 919. Wewnątrz trójkąta równobocznego wybrano pewien punkt, a następnie połączono go z wierzchołkami trójkąta oraz jego rzutami na boki trójkąta (rys. 1). Wykazać, że suma pól zacieniowanych trójkątów równa jest sumie pól niezacieniowanych trójkątów.

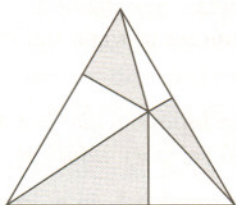
Rozwiązanie na str. 2

M 920. Przez punkt wewnętrzny kwadratu poprowadzono proste równoległe do jego boków i przekątnych (rys. 2). Wykazać, że suma pól figur zacieniowanych jest równa sumie pól figur niezacieniowanych.

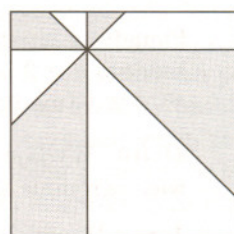
Rozwiązanie na str. 6

M 921. W trapezie równoramiennym poprowadzono przekątne oraz wysokości z wierzchołków górnej podstawy (mniejszej, rys. 3). Wykazać, że suma pól trójkątów szarych jest równa polu pięciokąta kolorowego.

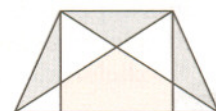
Rozwiązanie na str. 7



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Redaguje Ewa CZUCHRY

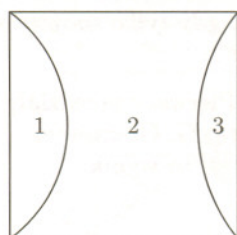
F 525. Promień krzywizny wypukłej powierzchni soczewki wynosi 100 cm, a wklęsłej 20 cm. Czy jest to soczewka skupiająca czy rozpraszająca?

Współczynnik załamania materiału soczewki wynosi 1,6.

Rozwiązanie na str. 8

F 526. Z płytki szklanej płasko-równoległej wykonano trzy soczewki (rys. 4). Okazało się, że ogniskowa soczewek 1 i 2, ściśle do siebie przylegających, jest równa F , a soczewek 2 i 3 – f . Zakładając, że soczewki są cienkie, znaleźć ogniskową każdej z nich.

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 4