Jerzy Browkin: Istnieje hipoteza, że jest ona mniejsza od 2. Nadal jest to jednak tylko hipoteza. Największa znana obecnie wartość $L(a,b)$ dla liczb a i b względnie pierwszych wynosi 1,629912... dla $a = 2$, $b = 3^9 \cdot 109$, $c = 23^5$. Znalazł ją Eric Reyssat.

Delta: *Czy do poszukiwania takich ekstremalnych wartości $L(a,b)$ wystarcza kartka papieru, czy też konieczne są „superkomputery"?*

Jerzy Browkin: Jeszcze niedawno wystarczał... kalkulator. Obecnie używa się już raczej „superkomputerów".

Delta: *Dziękuję za rozmowę.*

Rozmawiał W.S.

Hipoteza *abcd*

Niech a, b, c, d będą takimi liczbami całkowitymi różnymi od zera, że

$$NWD(a,b,c,d) = 1, \quad |abcd| > 1, \quad a+b+c+d = 0$$

oraz każda podsuma sumy $a+b+c+d$ jest różna od zera.

Określamy

$$L(a,b,c,d) = \frac{\log(\max(|a|,|b|,|c|,|d|))}{\log(r(abcd))},$$

gdzie $r(n)$ jak zwykle oznacza iloczyn różnych dzielników pierwszych liczby n. Hipoteza *abcd* stwierdza, że dla każdego $q > 3$ istnieje tylko skończenie wiele takich układów (a,b,c,d), że $L(a,b,c,d) \geq q$.

Uwaga 1. Jeżeli $a+b=c$ spełnia założenia hipotezy *abc*, to podnosząc do sześcianu, otrzymamy przykład dla hipotezy *abcd*

$$a^3 + b^3 - c^3 + 3abc = 0.$$

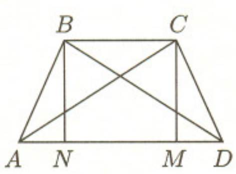
Łatwo zauważyć, że jeśli liczba *abc* jest podzielna przez 3, to $L(a^3, b^3, c^3, 3abc) = 3L(a,b,c)$, co wyjaśnia, dlaczego w hipotezie *abcd* mamy liczbę 3.

Uwaga 2. Hipotezy *abc* i *abcd* dotyczą liczb całkowitych. Można sformułować analogiczne hipotezy dla wielomianów (jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych), zastępując logarytm liczby naturalnej przez stopień wielomianu. Otóż hipotezy *abc* i *abcd* dla wielomianów zostały udowodnione – przestały więc być hipotezami, a stały się twierdzeniami.

Najlepszy znany przykład dla hipotezy *abcd* pochodzi od najlepszego przykładu znanego dla hipotezy *abc*, tzn. od przykładu Reyssata za pomocą podniesienia do sześcianu. W przypadku hipotezy *abcd* nie prowadzono poszukiwań dobrych przykładów za pomocą komputerów ani bez ich pomocy. Jest to zatem pole do popisu dla Czytelników *Delty*. Inny ciekawy problem, związany z hipotezą *abcd*, to pytanie, jak ją sformułować, przy założeniu, że liczby a, b, c, d są **parami** względnie pierwsze. Zapewne liczba 3 nie jest w tej sytuacji odpowiednia. To również może być przedmiotem interesujących eksperymentów Czytelników.

Jerzy BROWKIN

Rozwiązanie zadania M 921.
Przy oznaczeniach z rysunku rozważmy trójkąt ACM. Jego wysokość jest równa wysokości trapezu, podstawa AM – długości środkowej trapezu, a więc pole tego trójkąta, jak również pole trójkąta BDN, jest równe połowie pola trapezu. Wynika stąd, że pole części wspólnej obu trójkątów (pięciokąt) jest równe polu figury nie pokrytej tymi trójkątami.



Rozwiązanie problemu Speedlimit z *Małej Delty*

Przypuśćmy, że wujek Zenon zbliża się do miasteczka Speedlimit z prędkością x mil na godzinę, gdy jest oddalony od Speedlimit o x mil. Kiedy znajdzie się w odległości 1 mili od miasteczka, jechać więc będzie z szybkością 1 mili na godzinę. Najbliższe pół mili pokona więc z szybkością nie większą niż 1 mila/godz., co zajmie mu nie mniej niż 0,5 mili/(1 mila/godz.) = 0,5 godziny. Połowę pozostałej drogi (czyli 0,25 mili) pokona z prędkością nie większą niż 0,5 mili na godzinę (dlaczego?), a zatem zajmie mu to nie mniej niż $0{,}25/0{,}5 = 0{,}5$ godziny. Pokonanie połowy pozostałej części drogi znów zajmie mu nie mniej niż pół godziny itd., itd. Stąd, żeby dotrzeć do celu, potrzebować będzie nie mniej godzin niż: $1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots = \infty$. A zatem do miasteczka Speedlimit nie można w ten sposób dojechać w skończonym czasie.